Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2005/2006
7.12.2005

Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 8: Einfaches Stern-Modell, Jacobi Determinante

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Stern kann näherungsweise durch eine statische Gaskugel (einkomponentiges, fluides Medium) modelliert werden, wobei der Druck gerade die gravitative Anziehung kompensiert. Zwischen Druck p und Dichte des Sterns ρ besteht erfahrungsgemäß der Zusammenhang:

$$p = K\rho^\Gamma \quad (K, \Gamma : \text{Materialkonstanten}, \Gamma > 0).$$

Berechnen Sie die Dichteverteilung $\rho(r)$ im Stern für $\Gamma = 2$ unter Verwendung der Newtonschen Potentialgleichung

$$\triangle U = 4\pi G\rho \quad (\text{G: Newtonsche Gravitationskonstante})$$

und bestimmen Sie die Beziehung zwischen Masse M und Radius R des Sterns.
Hinweis: Die Euler-Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ des fluiden Mediums

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = -\rho\nabla U$$

liefert den Zusammenhang zwischen Druckverteilung im Stern und dessen Gravitationspotential.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

f und g seien Funktionen von zwei Variablen u und v. Die Jacobi Determinante ist definiert als

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} := \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v .$$

a. Beweisen Sie die folgende Kettenregel

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

wobei $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$.

Hinweis: Hier ist es vorteilhaft, die Determinante mit Hilfe des ε-Tensors darzustellen.

b. Benutzen Sie die in Teilaufgabe (a) bewiesene Relation um folgende Identität zu zeigen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}.$$

c. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = 1.$$

Hinweis: Sehen Sie sich die gemischten zweiten Ableitungen der freien Energie (bei konstanter Teilchenzahl) nach ihren natürlichen Variablen an.

Abgabetermin: Mittwoch, 14.12.2005 vor Beginn der Vorlesung.