Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2005/2006
30.11.2005

Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 7: Dichtematrix, Variationsprinzip

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas aus zweiatomigen Molekülen. Jedes Molekül kann als starrer Körper betrachtet werden, bei dem die gesamte Masse in den beiden Atomen konzentriert ist. Im thermischen Gleichgewicht besitzen beide Atome einen mittleren Abstand R, so dass das Trägheitsmoment des Moleküls $\theta = \mu R^2/2$ beträgt, wobei μ die reduzierte Masse bezeichnet. Im folgenden interessieren nur die Rotationsfreiheitsgrade, die zu einer Energie

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\theta} j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

führen.

a. Drücken Sie die spezifische Wärme C_{rot} in Momenten der Rotationsenergie E_{rot} aus.

b. Berechnen Sie die mittlere Rotationsenergie $\langle E_{rot} \rangle$ und die spezifische Wärme C_{rot} jeweils im Grenzfall kleiner und großer Temperaturen.

c. Skizzieren Sie die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur, indem Sie die Ergebnisse aus b. anwenden.

Hinweis: Verwenden Sie die Euler-MacLaurin Summationsformel für die Hochtemperaturentwicklung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Neutronenstrahl bewege sich in die positive z-Richtung und bestehe aus der inkohärenten Überlagerung zweier Neutronenstrahlen gleicher Intensität. Die Neutronen in jedem der einzelnen Strahlen seien vollständig polarisiert, einmal in die positive x-Richtung und einmal in die positive y-Richtung.

a. Bestimmem Sie die Dichtematrix ρ des Systems und berechnen Sie die Polarisation, d.h. den mittleren Spinvektor $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$.

   Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Eigenzustände der Pauli Spinmatrizen σ_i und stellen Sie ρ in der entsprechenden Eigenbasis dar. Die Spinmatrizen lauten:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Berechnen Sie die Eigenwerte und die entsprechenden normierten Eigenvektoren der Dichtematrix. Stellen Sie ρ in der normierten Eigenbasis dar.

c. Im Experiment (z.B. Stern-Gerlach Versuch) werden Neutronen mit einer Ausrichtung in die α Richtung selektiert. Berechnen Sie den mittleren Anteil der Teilchen mit Spin in die α Richtung und skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von α.

   Hinweis: σ_α ist gegeben durch

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

d. Im Anschluss an die vorherige Messung in Richtung α wird noch einmal die Polarisation der Teilchen in die positive x-Richtung gemessen. Wie hoch ist nun der mittlere Anteil der Teilchen, der in dieser Richtung polarisiert ist?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Wie lautet die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{p})$, die das Funktional

$$H = -\int f(\mathbf{p}) \ln f(\mathbf{p})\, d^3p\,,$$

unter den Bedingungen maximiert, dass die Verteilungsfunktion zu $\int f(\mathbf{p})\, d^3p = n$ normiert ist und sich die mittlere kinetische Energie zu $\int f(\mathbf{p})p^2/2m\, d^3p = \epsilon n$ ergibt.

Abgabetermin: Mittwoch, 07.12.2005 vor Beginn der Vorlesung.