

**Statistische Physik - Theorie der Wärme**  
(PD Dr. M. Falcke)

**Übungsblatt 6: Spuroperator, Dichtematrix, Dekohärenz**

**Aufgabe 1**

(4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Spuroperators:

- Sp  $A$  ist invariant unter Basistransformation.
- Die Spurbildung ist eine lineare Abbildung, d.h. additiv und homogen.
- $\text{Sp}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \langle\phi|\psi\rangle$ .
- Die Spur ist zyklisch invariant, d.h.  $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$ , wenn sowohl  $\text{Sp}(AB)$  als auch  $\text{Sp}(BA)$  existieren.
- Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum derart, daß  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$  gilt. Seien  $A$  und  $B$  Operatoren, die jeweils nur auf die Hilberträume  $\mathcal{H}_a$  bzw.  $\mathcal{H}_b$  wirken. Dann faktorisiert die Spur, d.h.  $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}_a(A) \text{Sp}_b(B)$ .
- Sei  $\rho(t)$  ein zeitabhängiger Dichteoperator, dann ist  $\text{Sp}(\rho^2(t))$  zeitunabhängig, i.e. ein reiner Zustand bleibt rein, ein gemischter Zustand bleibt gemischt.

**Aufgabe 2**

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Entropie  $S = -k_B \text{Sp}(\rho \ln \rho)$  eines quantenmechanischen Systems bei unitärer Zeitentwicklung zeitlich konstant bleibt.

**Hinweis:** Benutzen Sie die Entwicklung:  $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (x-1)^k / k$ ,  $0 < x \leq 2$ .

**Aufgabe 3**

(4 Punkte)

Gegeben sei ein Zwei-Energieniveau-System. Die normierten Energiezustände seien mit  $|E_1\rangle$  und  $|E_2\rangle$  bezeichnet. Ein beliebiger Zustand  $|\psi(t)\rangle$  des Systems besitzt dann die Darstellung

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} |E_1\rangle + c_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} |E_2\rangle$$

wobei  $E_1$  und  $E_2$  die zugehörigen Energieeigenwerte und  $c_1$  und  $c_2$  komplexwertige Normierungskonstanten sind. Der diesem Zustand zugeordnete Dichteoperator sei mit  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  bezeichnet. Zeigen Sie, dass der zeitgemittelte Dichteoperator  $\overline{\rho(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(t) dt$  für Zeiten  $T$ , die sehr gross gegenüber  $\hbar/|E_2 - E_1|$  sind, in den eines Gemisches übergeht.

**Abgabetermin:** Mittwoch, 30.11.2005 vor Beginn der Vorlesung.