

Statistische Physik - Theorie der Wärme
(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 4: Mikrokanonisches / Kanonisches Ensemble

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten wie in der Vorlesung ein Zwei-Niveau-System bestehend aus N identischen Teilchen, von denen jedes in zwei Zuständen mit den Energien $-\epsilon$ und $+\epsilon$ existieren kann. Die Gesamtenergie des Systems sei $E = M\epsilon$, wobei $M = -N, \dots, N$.

1. Wie groß ist das statistische Gewicht $W(N, M)$, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten, diese Energie zu realisieren? Benutzen Sie, im Gegensatz zur Vorlesung, eine kombinatorische Methode!
2. Welche Relation besteht zwischen der Energie E und der Temperatur T ? Gilt stets $T > 0$?
3. Berechnen Sie die spezifische Wärme dE/dT .
4. Skizzieren Sie die Energie und spezifische Wärme in Abhängigkeit von der Temperatur ($k_B T/\epsilon$).

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Ein System bestehe aus N identischen Oszillatoren, von denen der i -te Oszillator die Energieniveaus $\epsilon_{n_i} = (n_i + \frac{1}{2})h\nu$, $n_i = 0, 1, 2, \dots$ besetzen kann. Die Gesamtenergie des Systems sei

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_{n_i} = N \frac{h\nu}{2} + Mh\nu \quad \text{mit } M = \sum_{i=1}^N n_i \in \mathbb{N}.$$

1. Wie groß ist das statistische Gewicht $W(N, M)$?
2. Welche Relation besteht zwischen der Energie E und der Temperatur T ?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass sich ein gegebener Oszillator im Energieniveau n befindet? Approximieren Sie diesen Ausdruck für $N, M \gg 1$. Ist die so definierte Wahrscheinlichkeit auf 1 normiert?

Hinweis: Führen Sie im Ausdruck für $p(n)$ die Größe $m := M/N$ ein und überführen Sie dann $p(n)$ in eine Funktion von $h\nu$ mittels der Definition $\exp(-\beta h\nu) := m/(1+m)$.

Aufgabe 3

(2 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator im Wärmebad der Temperatur T . Seine möglichen Energieniveaus sind $E_n = h\nu(n + 1/2)$ wobei $n = 0, 1, 2, \dots$. Berechnen Sie zunächst die (kanonische) Zustandssumme und vergleichen Sie anschliessend die sich daraus ergebende Besetzungswahrscheinlichkeit, den Oszillator im n -ten Niveau anzutreffen mit der in Aufgabe 2.3 berechneten Wahrscheinlichkeit $p(n)$.

Hinweis: Für Systeme mit diskretem Energiespektrum ist die Zustandssumme durch $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ gegeben, wobei der Index i alle Zustände durchläuft, die die gegebene Energie E_i realisieren.

Abgabetermin: Mittwoch, 16.11.2005 vor Beginn der Vorlesung.