Lösungen

Aufgabe 1

1. Sei $X = \sum x_i$ und gelte $\rho(x_1) = \ldots = \rho(x_n)$, so ist wegen der statistischen Unabhängigkeit $\rho(X) = \rho(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho(x_n)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{G}(k) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikX} \rho(X) dX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik \sum x_i} \rho(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho(x_n) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \prod_i \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx_i} \rho(x_i) dx_i \right] = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \rho(x) dx \right]^N \\ &= [G(k)]^N \end{aligned} \tag{1}$$

2. Nach Blatt 2, Aufgabe 3 lautet die charakteristische Funktion für eine Gauss-Verteilung

$$G(k) = e^{ik\mu} e^{-k^2\sigma^2/2} \,. \tag{2}$$

Daher gilt

$$\tilde{G}(k) = \left[e^{ik\mu} e^{-k^2\sigma^2/2} \right]^N = e^{ik\mu N} e^{-k^2\sigma^2 N/2} \,. \tag{3}$$

Für die Momente bedeutet dies

$$\langle X \rangle = \frac{\partial}{\partial ik} \tilde{G}(k) \Big|_{k=0} = \frac{\partial}{\partial ik} \left[e^{ik\mu N} e^{-k^2\sigma^2 N/2} \right]_{k=0} = N\mu \tag{4}$$

und

$$\langle X^2 \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial ik} \right)^2 \tilde{G}(k) \Big|_{k=0} = \frac{\partial}{\partial ik} \left[(N\mu + Nik\sigma^2) e^{ik\mu N} e^{-k^2\sigma^2 N/2} \right]_{k=0} = N\sigma^2 + N^2\mu^2 \tag{5}$$

3. Da die x_i unkorreliert sind, gilt $a_{ij} = \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle = \delta_{ij} \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle = \delta_{ij}\sigma_i^2$. Somit ist A diagonal, was äquivalent zu $A^{-1} = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^{-2}, \ldots, \sigma_n^{-2}\right)$ ist. Für die Verbundwahrscheinlichkeit ergibt sich daher

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \sim \exp\left\{ \sum_i (x_i - \mu_i)^2 / 2\sigma_i^2 \right\} = \prod_i \exp\left\{ (x_i - \mu_i)^2 / 2\sigma_i^2 \right\} = \prod_i \rho(x_i) \,, \tag{6}$$

woraus die Behauptung folgt. Zusätzlich sieht man, dass die einzelnen Meßgrößen gaußverteilt sind.

Aufgabe 2

1. Das Teilchen habe einen Impuls p, wenn es sich nach rechts bewegt und einen Impuls $-p$ für die entgegengesetze Richtung. Da sich der Impuls nur bei $x = 0$ und $x = l$ ändert und zwischen den Endpunkten konstant bleibt, ergibt sich das Phasenraumbild wie in Abbildung 1.

2. Wie aus Abbildung 1 ersichtlich, beträgt das Phasenraumvolumen $\Sigma(E) = 2lp = 2l\sqrt{2mE}$.

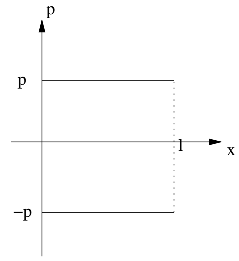

Abbildung 1: Phasenraumtrajektorie eines freien Teilchens mit elastischen Stößen bei $x = 0$ und $x = l$.

3. Für einen eindimensionalen elastischen Stoß zweier Teilchen mit den Massen m_1 und m_2, die vor dem Stoß die Impulse p_1 und p_2 besitzen, gilt nach dem Stoß

$$p_1' = \frac{p_1(m_1 - m_2) + 2m_1 p_2}{m_1 + m_2}, \qquad p_2' = \frac{p_2(m_2 - m_1) + 2m_2 p_1}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Impulse vorzeichenbehaftet sind, d.h. $p > 0$ entspricht einer Geschwindigkeit nach rechts und $p < 0$ einer Bewegung nach links. Sei $m_1 = m$ die Masse des Teilchen und $m_2 \gg m_1$ diejenige der Wand, dann ergibt sich mit $u = v_2$

$$p_1' = -\left(p_1 m_2 + 2mp_2\right)/m_2 = -p_1 + 2mu. \tag{8}$$

Da sich die Wand adiabatisch bewegt, ist $u \ll v_1$, so dass $p_1' < 0$. Daher verringert sich der Impuls des Teilchens bei jedem Stoß um $2mu$. Ändert die Wand ihre Position um δl, so benötigt sie dafür die Zeit $\delta l/u$. In der gleichen Zeit stößt das Teilchen $(\delta l/u)/(2l/v_1) = p_1\delta l/(2lmu)$-mal auf die Wand. Damit ändert sich der Impuls des Teilchen bei der adiabatischen Bewegung von der Wand um die Distanz δl um $\delta p = -2mu \times p\delta l/(2mul) = -p\delta l/l$, woraus $\delta(pl) = p\delta l + l\delta p = 0$. Aus Teilaufgabe b. finden wir somit, dass $\delta\Sigma(E) = 2\delta(pl) = 0$ gilt, d.h. das Phasenraumvolumen bleibt konstant bei der adiabatischen Bewegung der Wand.

4. Im quantenmechanischen Fall betrachten wir die Schrödinger Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x). \tag{9}$$

Die Fundamentallösung dieser Gleichung lautet

$$\psi(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x), \quad w^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \tag{10}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten A und B. Da $\psi(0) = 0$ gilt, muß B identisch verschwinden, also $B = 0$. Außerdem erfüllt die Wellenfunktion $\psi(l) = 0$, was $w = \pi n/l, n \in \mathbb{N}$ nach sich zieht. Somit erhalten wir für die Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2}n^2. \tag{11}$$

Das Phasenraumvolumen $\Sigma_q(E)$ ergibt sich daher zu

$$\Sigma_q(E) = \sum_{E_n \leq E} 1 = \left[\sqrt{\frac{8ml^2}{h^2}E}\right], \tag{12}$$

wobei $[x] := \max(i \in \mathbb{N}|i \leq x)$ bedeutet. Dies führt schließlich zu

$$\Sigma_q(E) \approx 2l\sqrt{2mE}/h = \Sigma(E)/h. \tag{13}$$

Aufgabe 3

1. Für das mikrokanonische Ensemble gilt

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E)\delta E} & E \leq H \leq E + \delta E\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{14}$$

   Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= -k_B \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \ln\left(\rho(x)\right) dx = -k_B \ln\left\{1/\Omega(E)\delta E\right\} \int\limits_{E \leq H \leq E+\delta E} \frac{1}{\Omega(E)\delta E} d^{3N}q d^{3N}p \\ &= k_B \ln\left\{\Omega(E)\delta E\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

2. Die Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich aus

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,, \tag{16}$$

   so dass

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}\,, \tag{17}$$

   gilt. Weiterhin ist der Parameter α durch die Schwankungsbreite $(\Delta x)^2$ gegeben,

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha}, \tag{18}$$

   da das 1. Moment identisch verschwindet. Somit erhalten wir

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}. \tag{19}$$

   Aus der Definition für die Entropie

$$S = -k_B \int \rho(x) \ln \rho(x) dx = -k_B \langle \ln \rho(x) \rangle\,, \tag{20}$$

   folgt daher

$$\begin{aligned} S &= -k_B \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{1}{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}} \left(\ln(\sqrt{\frac{1}{2\pi(\Delta x)^2}}) - \frac{x^2}{2(\Delta x)^2} \right) \\ &= k_B \ln(\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}) + \frac{k_B}{2} = k_B \log(\Delta x) + \text{const}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

   d.h. die Entropie wächst mit dem Logarithmus der Schwankungsbreite.