Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 3: Zentraler Grenzwertsatz, Mikrokanonisches Ensemble, Entropie

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Eine Meßgröße X sei die Summe von N unabhängigen Meßgrößen x_i, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x_i)$ und die gleiche charakteristische Funktion $G(k)$ besitzen.

a. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\tilde{G}(k)$ von $\rho(X)$ durch $\tilde{G}(k) = [G(k)]^N$ gegeben ist.

b. Berechnen Sie $\tilde{G}(k)$, $\langle X \rangle$ und $\langle X^2 \rangle$, wenn $\rho(x_i)$ eine Gaussverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 ist.

c. Für die Verbundwahrscheinlichkeit $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ der n Meßgrößen x_i gelte

$$\rho(x_1, \ldots, x_n) \sim \exp\left\{-(x-\mu)A^{-1}(x-\mu)/2\right\} ,$$

wobei A die Kovarianzmatrix ist, d.h. $a_{ij} = \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle$. Weiterhin seien die x_i paarweise unkorreliert. Zeigen Sie, dass die x_i statistisch unabhängig sind. Wie sind sie verteilt?

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich frei zwischen $0 \leq x \leq l$ und wird an Wänden bei $x = 0$ und $x = l$ elastisch gestreut.

a. Illustrieren Sie die Trajektorie des Massenpunktes im Phasenraum.

b. Wie groß ist das Phasenraumvolumen $\Sigma(E)$, d.h. das Phasenraumvolumen für Energien kleiner gleich E?

c. Zeigen Sie, dass $\Sigma(E)$ konstant bleibt, wenn die Wand bei $x = l$ adiabatisch nach rechts bewegt wird, wobei für die Masse M der Wand $M \gg m$ gelte.

d. Betrachten Sie das gleiche Problem nun quantenmechanisch, d.h. ein Teilchen in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = l$. Wie groß ist die gesamte Anzahl der Energiezustände mit Energien kleiner gleich E? Setzen Sie diese Zahl in Relation zu $\Sigma(E)$?

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Sei $\rho(x), x \in \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, dann wird die Entropie S allgemein über

$$S = -k_B \int \rho(x) \ln \rho(x) dx = -k_B \langle \ln \rho(x) \rangle ,$$

definiert.

a. Zeigen Sie, dass für das mikrokanonische Ensemble die vorstehende Definition mit der aus der Vorlesung übereinstimmt.

b. Berechnen Sie die zu einer Gauß-Verteilung $\rho(x) \sim \exp(-\alpha x^2), \alpha > 0$ gehörende Entropie. Diskutieren Sie insbesondere ihre Abhängigkeit vom mittleren Schwankungsquadrat $(\Delta x)^2$!