Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2005/2006
26.10.2005

**Statistische Physik - Theorie der Wärme**
(PD Dr. M. Falcke)

**Übungsblatt 2:** Bayesche Formel, charakteristische Funktionen und statistische Unabhängigkeit

# Lösungen

**Aufgabe 1**
Sei $B$ das Ereignis, dass die gezogene Kugel weiss ist. Weiterhin ist

$$P(A_1) = 2/5 \qquad P(B/A_1) = 2/5$$

$$P(A_2) = 2/5 \qquad P(B/A_2) = 1/5$$

$$P(A_3) = 1/5 \qquad P(B/A_3) = 4/5$$

so dass die gesuchte W.keit $P(B/A_3)$ gemäss der Bayeschen Formel für a posteriori W.keiten gleich

$$P(A_3/B) = \frac{P(B/A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/A_i)P(A_i)} = \frac{2}{5}$$

ist.
**Aufgabe 2**

Analog den Momenten $\langle x^n \rangle$, die man aus den Ableitungen der charakteristischen Funktion $G(k)$ nach $ik$ an der Stelle $k = 0$ bekommt

$$\mu_n \equiv \langle x^n \rangle = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(ik)^n} G(k) \mid_{k=0}, \tag{1}$$

erhält man die Kumulanten aus den Ableitungen von $\ln G(k)$ nach $ik$ an der Stelle $k = 0$:

$$\kappa_n \equiv \langle\langle x^n \rangle\rangle = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(ik)^n} \ln G(k) \mid_{k=0} .$$

Insbsondere lassen sich die Kumulanten gemäss

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}(ik)^{n-1}} \frac{1}{G(k)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)} G(k) \mid_{k=0}$$

iterativ aus den Momenten berechnen. Für die folgenden Rechnungen setzen wir $d/d(ik)G(k) \equiv G'(k)$, $d^2/d(ik)^2 G(k) \equiv G''(k)$, usw.
Für die erste Kumulante erhalten wir

$$\kappa_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)} \ln G(k) \mid_{k=0} = \frac{1}{G(0)} G'(k) \mid_{k=0} = \mu_1 .$$

Hier haben wir $G(0) = 1$ und die Definition der charakteristischen Funktion (1) als momentengenerierende Funktion benutzt. Analog erhält man für die höheren Kumulanten:

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)}\left\{\frac{1}{G(k)}G'(k)\right\}|_{k=0} \\
&= -\frac{1}{G^2(0)}[G'(0)]^2 + \frac{1}{G(0)}G''(0) \\
\kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(ik)^2}\left\{\frac{1}{G(k)}G'(k)\right\}|_{k=0} \\
&= \frac{2}{G^3(0)}[G']^3 - \frac{3}{G^2(0)}[G']G'' + \frac{1}{G(0)}G'''(0) \\
\kappa_3 &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}(ik)^3}\left\{\frac{1}{G(k)}G'(k)\right\}|_{k=0} \qquad (2)\\
&= -\frac{6}{G^4(0)}[G']^4 + \frac{12}{G^3(0)}[G'(0)]^2G''(0) - \frac{3}{G^2(0)}[G''(0)]^2 - \frac{4}{G^2(0)}G'(0)G'''(0) + \frac{1}{G(0)}G^4(0) \\
\kappa_4 &= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3**

Zunächst zu den charakteristischen Funktionen:

**Binomialverteilung**

$$\begin{aligned}
p_n &= \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \qquad (3)\\
G(k) &= \sum_{n=0}^{N} e^{ikn}\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (pe^{ik})^n (1-p)^{N-n} \\
G(k) &= (pe^{ik} + 1 - p)^N.
\end{aligned}$$

**Gaussverteilung**

$$\begin{aligned}
p(x) &= \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
G(k) &= \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ikx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned}
G(k) &= e^{ik\mu} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[(x-(\mu+ik\sigma^2))]^2}{2\sigma^2}} \\
G(k) &= e^{ik\mu} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \int_{-\infty-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},
\end{aligned}$$

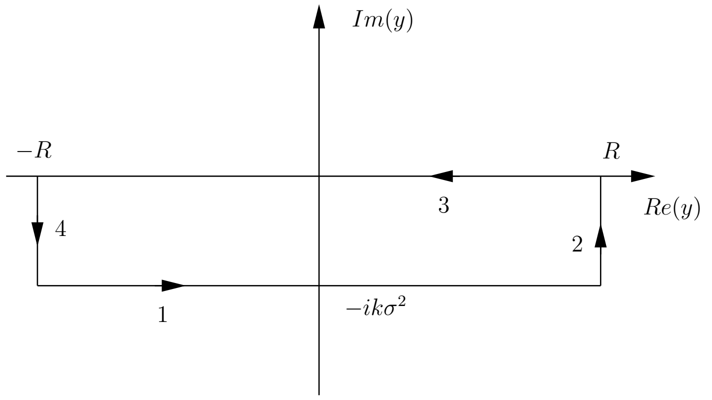


Abbildung 1: Integrationsweg in der komplexen $y$-Ebene.

wo wir $y = x - (\mu + ik\sigma^2)$ gesetzt haben, was den Integrationsweg in die komplexe $y$-Ebene auf eine zur rellen Achse parallele Geraden durch den Punkt $y = -ik\sigma^2$ verschiebt. Da der Integrand $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ eine in der gesamten komplexen Ebene holomorphe Funktion ist, gilt der Cauchysche Integralsatz, wonach das Ringintegral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen einfach zusammenhängenden Weg gleich Null ist, insbesondere gilt (siehe Abbildung 1):

$$\int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \equiv \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{-R-ik\sigma^2}^{R-ik\sigma^2} + \int_{R-ik\sigma^2}^{R} + \int_{R}^{-R} + \int_{-R}^{-R-ik\sigma^2} \right\} f(y)dy = 0, \tag{4}$$

sodass der Integrationsweg wieder zurück auf die relle Achse verschoben werden darf, falls die Integrale über die Teilstücke 2 und 4 im Limes $R \to \infty$ verschwinden. Diese lassen sich aber einfach abschätzen, z.B. findet man

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{R-ik\sigma^2}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy &= \lim_{R\to\infty} \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(R+it)^2}{2\sigma^2}} i\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{2iRt-t^2}{2\sigma^2}}\, dt.
\end{aligned}$$

Das Integral ist aber beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
0 < \left| \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{2iRt-t^2}{2\sigma^2}}\, dt \right| &\leq \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\left| ie^{-\frac{i2Rt}{2\sigma^2}} \right|}_{=1} \underbrace{\left| e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \right|}_{\leq \max_{t\in[-k\sigma^2,0]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \leq C} dt \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-k\sigma^2}^{0} dt = \frac{Ck\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} < \infty,
\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{R-ik\sigma^2}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0$$

Analog lässt sich das Integral über den Weg 4 abschätzen, sodass wir schliesslich

$$\int\limits_{-\infty-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dy\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

und damit für die charakteristische Funktion der Gaussverteilung

$$\begin{aligned} G(k) &= e^{ik\mu}e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \qquad (5) \\ &= e^{ik\mu}e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sqrt{2\pi\sigma^2} \\ G(k) &= e^{ik\mu}e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}\text{erhalten.} \end{aligned}$$

**(3a)**

Wir berechnen nun Mittelwert und Varianz der beiden Verteilungen mit Hilfe der charakteristischen Funktionen (4) und (6). Für die folgenden Rechnungen setzen wir $ik = s$ und bezeichnen Ableitungen nach $s$ mit $'$.

**Binomialverteilung** Für die ersten beiden Momente erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_1 &= G'(s=0) \\ &= N(pe^s + 1 - p)^{N-1}pe^s|_{s=0} \\ &= Np \\ \mu_2 &= G''(s=0) \\ &= N(N-1)(pe^s + 1 - p)^{N-2}(pe^s)^2|_{s=0} \\ &+ N(pe^s + 1 - p)^{N-1}pe^s|_{s=0} \\ &= N(N-1)p^2 + Np, \end{aligned}$$

soadss wir für die Varianz

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = N^2p^2 - Np^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p)$$

bekommen.

**Gaussverteilung** Mit der charakteristischen Funktion für die Gaussverteilung

$$\begin{aligned} G(k) &= e^{ik\mu}e^{\frac{(ik)^2}{2}\sigma^2} \\ G(ik=s) &= e^{s\mu}e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2} \end{aligned}$$

erhalten wir folgende Ausdrücke für die ersten beiden Momente

$$\begin{aligned} \mu_1 &= G'(s=0) \\ &= (\mu + s\sigma^2)e^{s\mu}e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2}|_{s=0} \\ &= \mu \\ \mu_2 &= G''(s=0) \\ &= \Big(\mu(\mu+s\sigma^2) + \sigma^2 + s\sigma^2(\mu+s\sigma^2)\Big)e^{s\mu}e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2}|_{s=0} \\ &= \mu^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

sodass die Varianz

$$\langle (\triangle x)^2 \rangle = \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2$$

wird.

**(3b)**

Wir kommen nun zur Berechnung von Mittelwert und Varianz mit Hilfe der Definition für die Momente.

**Binomialverteilung**

$$\begin{aligned}
\langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\
&\overset{(n=0 \to n=1)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\
&\overset{n-1 \to m}{=} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{m!(N-(m+1))!} p^{m+1} (1-p)^{N-(m+1)} \\
&= Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!(N-1-m)!} p^m (1-p)^{(N-1)-m} \\
&= Np,
\end{aligned}$$

da für die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Bernoulli Experiments mit $N-1$ Versuchen gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!(N-1-m)!} p^m (1-p)^{(N-1)-m} &= \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} p^m (1-p)^{(N-1)-m} \\
&= (p+1-p)^{N-1} \equiv 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{N} n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} n(n-1) \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} + \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} n(n-1) \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} + Np \\
&\overset{(n=0 \to n=2)}{=} \sum_{n=2}^{N} \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} + Np \\
&\overset{(n-2 \to m)}{=} \sum_{m=0}^{N-2} \frac{N!}{m!(N-2-m)!} p^{m+2} (1-p)^{N-2-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2 \sum_{m=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{m!(N-2-m)!} p^m (1-p)^{N-2-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2 + Np,
\end{aligned}$$

da für die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Bernoulli Experiments mit $N-2$ Versuchen ebenfalls gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{m!(N-2-m)!} p^m (1-p)^{(N-2)-m} &= \sum_{m=0}^{N-2} \binom{N-2}{m} p^m (1-p)^{(N-2)-m} \\ &= (p+1-p)^{N-2} \equiv 1.\end{aligned}$$

**Gaussverteilung**

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\overset{y=x-\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\ y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ \mu_1 &= \mu \\ \mu_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\overset{y=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \frac{y^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + 2\frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\ y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi}\sigma} + \mu^2 \\ \mu_2 &= \sigma^2 + \mu^2.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4**

Zuerst berechnen wir die W.keit $p(x)$:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \langle\delta(x-\cos\varphi)\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \Big(\frac{1}{|x'(\varphi)|}\delta(\varphi-\arccos x)+\frac{1}{|x'(\varphi)|}\delta(2\pi-\varphi-\arccos x)\Big) \qquad (6) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\frac{1}{|\sin(\varphi)|}\Big(\delta(\varphi-\arccos x)+\delta(2\pi-\varphi-\arccos x)\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\frac{1}{|\sin(\arccos x)|}}_{\sqrt{1-x^2}}+\underbrace{\frac{1}{|\sin(2\pi-\arccos x)|}}_{|-\sin(\arccos x)|}\Big) \\
p(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

wobei wir in (6) benutzt haben, dass der Arkuskosinus im interessierenden Intervall $0\le\varphi\le 2\pi$ zwei Zweige besitzt:

$$x=\cos\varphi \leftrightarrow \begin{cases} \varphi=\arccos x \\ 2\pi-\varphi=\arccos x \end{cases} \quad |x|\le 1 \quad \text{and} \quad 0\le\varphi\le\pi.$$

Eine analoge Rechnung für $p(y)$ liefert $p(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2})$.
Die Verbundw.keit $p(x,y)$ errechnet sich wiefolgt:

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \langle\delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi)\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi)\underbrace{\int\limits_0^{\infty} d(r^2)\ \delta(r^2-1)}_{=1} \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} rdr\ \delta(r^2-1)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-r\cos\varphi)\delta(y-r\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \delta(\xi^2+\eta^2-1)\delta(x-\xi)\delta(y+\eta) \\
p(x,y) &= \frac{1}{\pi}\delta(x^2+y^2-1).
\end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt von polar- auf kartesische Koordinaten transformiert und benutzt, dass $r=1$ ist. Zur Berechnung der Kovarianz brauchen wir die Mittelwerte von $x$ und $y$. Diese ergeben sich zu

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = 0 = \int\limits_{-1}^{1}\frac{ydy}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \langle y\rangle,$$

sodass wir für die Kovarianz zwischen $x$ und $y$

$$\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle_\varphi = \langle xy\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

erhalten. Hieraus folgt, dass sind $x$ und $y$ nicht korrelliert sind. Darüberhinaus sind $x$ und $y$ aber nicht unabhängig, da $p(x,y) \neq p(x)p(y)$.