Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2005/2006
19.10.2005

Statistische Physik - Theorie der Wärme
(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 1: Kombinatorik

Lösungen

Aufgabe 1

1. Lottospielen entspricht dem Ziehen aus einer Urne, in der es zwei Sorten von ununterscheidbaren Kugeln gibt: die Kugeln mit den gesuchten Nummern und die übrigen. Da die Reihenfolge für das spätere Endergebnis keine Rolle spielt, gleicht Lottospielen einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen. Bei 6 aus 49 gibt es dementsprechend insgesamt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten, k richtige Kugeln zu ziehen folgt, als $\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$, i.e. k Kugeln aus denen, die die Siegerzahlen ausmachen und $6-k$ Kugeln aus den übrigen.
$$\text{6 aus 49: } P(n=4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0.097\%\,,$$
$$\text{5 aus 35: } P(n=4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{30}{1}}{\binom{35}{5}} \approx 0.046\%\,.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit, einen 3er mit Zusatzzahl (ZZ) zu ziehen, ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, einen 3er in der normalen Ziehung zu ziehen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, die Zusatzzahl aus den verbleibenden Kugeln zu ziehen. Für einen 3er ohne Zusatzzahl folgt die Wahrscheinlichkeit als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, einen 3er in der ersten Ziehung zu erhalten, und der Wahrscheinlichkeit, die falsche Zahl bei der Zusatzzahl zu ziehen.
$$P(n=3+ZZ) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\frac{\binom{3}{1}\binom{40}{0}}{\binom{43}{1}}\,, \quad P(n=3-ZZ) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\frac{\binom{3}{0}\binom{40}{1}}{\binom{43}{1}}$$
Allgemein zerlegt sich das Ereignis eines 3ers im Lotto in einen 3er mit Zusatzzahl und einen 3er ohne Zusatzzahl, also
$$P(n=3) = P(n=3+ZZ) + P(n=3-ZZ) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\,,$$
was in Übereinstimmung mit Aufgabe 1a ist. Hierbei haben wir benutzt, dass
$$\binom{3}{1}\binom{40}{0} + \binom{3}{0}\binom{40}{1} = \binom{43}{1}\,.$$
Anmerkung: Sei A ein Ereignis und $\{B_i\}_{i\in I}$ eine Menge von anderen Ereignissen derart, dass $B_i \cap B_j = \emptyset\,, i \neq j$ und $\sum_i P(B_i) = 1$, dann gilt: $P(A) = \sum_i P(A\cap B_i)$. Desweiteren erhält man für $N, M, n \in \mathbb{N}$ die Identität:
$$\binom{N+M}{n} = \sum_{l=0}^{n}\binom{N}{l}\binom{M}{n-l}\,.$$
Die obige Aufgabe ist daher ein Spezialfall dieser allgemeineren Aussage.

3. Im ersten Schritt hat der Matrose n Masten zur Auswahl. Dieser Mast wird durch die Fahne in 2 Teile geteilt, so dass der Matrose für die zweite Fahne nun $n+1$ Möglichkeiten besitzt. Entsprechend folgt, dass für die 3. Fahne $n+2$ mögliche Plätze existieren. Daher hat der Matrose $n(n+1)\cdots(n+r-1)$ verschiedene Alternativen zum Hissen der Fahnen.

4. Da jeder Passagier potentiell auf allen 45 Etagen aussteigen kann, gibt es ingesamt 45^r Ausstiegsszenarien. In dem Fall, dass keine 2 Passagiere zur gleichen Zeit aussteigen, hat der erste Passagier 45 Möglichkeiten, der zweite aber nur noch 44. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Passagiere auf verschiedenen Etagen dem Lift entkommen $45\cdot 44\cdots(45-r+1)/45^r = (45)_r/45^r$. Tabelle 1 zeigt diese Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von r. Da die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Fahrgäste zusammen aussteigen, $1-(45)_r/45^r$ entspricht, müssen nur 8 Personen mitfahren, damit dies mit einer Wahrscheinlichkeit größer 1/2 eintritt.

r	1	2	3	4	5	6
p	1	0.977778	0.934321	0.872033	0.794519	0.706239
	7	8	9			
	0.612074	0.516862	0.424976			

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeit p, dass bei 45 Stockwerken und r Personen im Aufzug keine 2 auf der gleichen Etage aussteigen

5. Die 52 Karten werden auf 4 Spieler aufgeteilt. Da die Reihenfolge innerhalb der Karten eines Spielers keine Rolle spielt, gibt es insgesamt $52!/(13!)^4$ mögliche Kartenverteilungen. Die 4 Asse können auf 4! verschiedene Weisen auf die Spieler ausgeteilt werden (beim ersten Ass hat man 4 Spieler zur Auswahl, beim zweiten nur noch 3 usw.) Für die restlichen Karten existieren noch $48!/(12!)^4$ Möglichkeiten, da auch hier wieder die Reihenfolge auf der Hand eines jeweiligen Spielers unerheblich ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit p, dass jeder Spieler genau ein Ass auf der Hand hält
$$p = \frac{24\cdot 48!\cdot(13!)^4}{52!\cdot(12!)^4} = \frac{24\cdot 48!\cdot 13^4}{52!} = 0.105\,.$$

Aufgabe 2

Sei A das Ereignis, dass die 2. Karte ein Ass ist, und B das Ereignis, dass beim ersten Mal auch schon ein Ass gezogen wurde. Es gibt insgesamt $36\cdot 35$ Versuchsausgänge, da die Reihenfolge beachtet werden muss. Darunter befinden sich $4\cdot 3$ Möglichkeiten, 2 Asse zu ziehen, und $4\cdot 32$ Möglichkeiten, ein Ass und irgendeine andere Karte zu erhalten. Damit erhalten wir

1. $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B}) = \frac{4\cdot 3}{36\cdot 35} + \frac{4\cdot 32}{36\cdot 35} = \frac{1}{9}$,
2. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{4\cdot 3}{36\cdot 35}/\frac{4}{36} = \frac{3}{35}$.

Das Ergebnis unter b läßt sich auch so lesen, dass nach dem ersten Zug noch 35 Karten vorhanden sind, unter denen 3 Asse sind.

Aufgabe 3

Die Gammafunktion interpoliert die Fakultät gemäß
$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x+n\ln x}dx\,.$$

Die Funktion $f(x) := n\ln x - x$ besitzt bei $x=n$ ein Maximum. Entwickeln wir f um dieses Maximum und berücksichtigen, dass $f'(x)$ dort verschwindet, so erhalten wir
$$f(x) = n\ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \frac{1}{3n^2}(x-n)^3 - \frac{1}{4n^3}(x-n)^4 + \mathcal{O}\left(\frac{(x-n)^5}{n^4}\right)\,.$$

Daraus folgt für die Fakultät

$$n! = n^n e^{-n} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2n}(x-n)^2 + \frac{1}{3n^2}(x-n)^3 - \frac{1}{4n^3}(x-n)^4 + \dots\right\} dx\,.$$

Durch die Substitution $y := (x-n)/\sqrt{n}$ geht die obige Gleichung über in

$$\begin{aligned} n! =& n^n e^{-n}\sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy \\ &= n^n e^{-n}\sqrt{n}\left[\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy - \psi(-\sqrt{n})\right] , \end{aligned}$$

mit

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3x}y^3 - \frac{1}{4x^2}y^4 \dots\right\} dy\,.$$

Für $n \gg 1$ entspricht der führende Term in $\psi(-\sqrt{n})$ der Gaußschen Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(-\sqrt{\mathrm{n}})$. Da diese asymptotisch wie $\exp(-n)/\sqrt{n}$ skaliert, führt das Vernachlässigen von $\psi(-\sqrt{n})$ in der obigen Gleichung zu einem exponentiell kleinen Fehler. Somit erhalten wir als Näherung für die Fakultät

$$\begin{aligned} n! &\sim n^n e^{-n}\sqrt{n} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy \\ &= n^n e^{-n}\sqrt{n} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} \exp\left\{\frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy \\ &\overset{n\gg 1}{\cong} n^n e^{-n}\sqrt{n} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right] dy \\ &= n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left[1 - \frac{3}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] , \end{aligned}$$

womit die Stirlingsche Formel bewiesen ist.