

**Statistische Physik - Theorie der Wärme**  
 (PD Dr. M. Falcke)

**Übungsblatt 12: Ferromagnet**

**Lösungen**

**Aufgabe 1**

- a. Abbildung 1 stellt die freie Energie für die drei Bereiche  $T < T_C$ ,  $T = T_C$  und  $T > T_C$  dar. Deutlich erkennbar ist die bistabile Form von  $F$  für  $T < T_C$ .

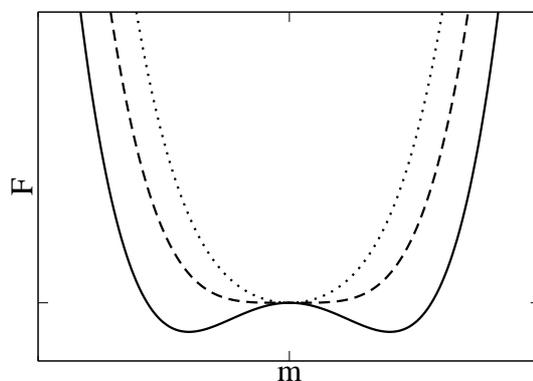


Abbildung 1: Freie Energie  $F$  als Funktion der Magnetisierung  $m$  bei  $h = 0$  für  $T < T_C$  (durchgezogen),  $T = T_C$  (gestrichelt) und  $T > T_C$  (gepunktet).

- b. Aus der Minimierung von  $F$  folgt die notwendige Bedingung  $0 = am + bm^3$ . Diese Gleichung besitzt die Lösungen

$$m = 0, \quad m = \pm \sqrt{-\frac{a}{b}} = \pm \sqrt{\frac{a_0}{b} \frac{T_C - T}{T_C}}. \quad (1)$$

Gleichung (1) zeigt, dass von Null verschiedene Extrema nur für  $T < T_C$  auftreten können. Das Minimum, das bei  $m = 0$  für  $T \geq T_C$  existiert, geht in ein lokales Maximum für  $T < T_C$  über. Dies ist in Abbildung 2 verdeutlicht.

- c. Um  $F$  als Funktion der Temperatur zu untersuchen, setzen wir die Lösungen für  $m(T)$  aus Gleichung (1) in die Definition von  $F$  ein. Da  $F \equiv 0$  für  $m = 0$ , betrachten wir im folgenden nur den Bereich  $T < T_C$

$$\frac{F(T)}{N} = \frac{a_0}{2} \frac{T - T_C}{T_C} \frac{a_0}{b} \frac{T_C - T}{T_C} + \frac{b}{4} \frac{a_0^2}{b^2} \left( \frac{T_C - T}{T_C} \right)^2 = -\frac{a_0^2}{4b} \left( \frac{T_C - T}{T_C} \right)^2. \quad (2)$$

Daraus ergibt sich die Entropie zu

$$S(T) = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_N = \frac{a_0^2 N}{2b} \frac{T - T_C}{T_C^2} \quad (3)$$

und die Wärmekapazität bei konstantem Volumen zu

$$C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{a_0^2 N}{2b} \frac{T}{T_C^2}. \quad (4)$$

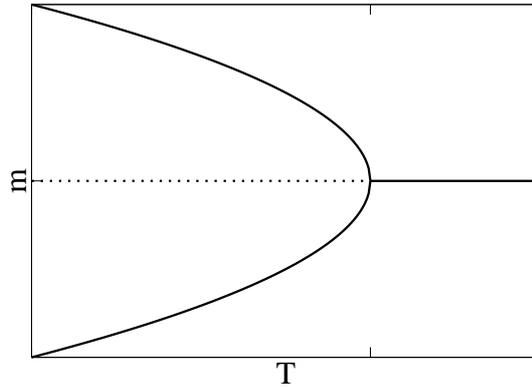


Abbildung 2: Extrema der Magnetisierung  $m$  als Funktion der Temperatur bei  $h = 0$ . Die Minima sind als durchgezogene Linien, das Maximum als gestrichelte Linie gezeichnet.

Abbildung 3 stellt die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur dar. Da  $m = 0$  für  $T > T_C$ , verschwindet dort auch die Wärmekapazität. Somit springt die Wärmekapazität am kritischen Punkt um  $\Delta C_V = a_0^2 N / (2bT_C)$ .

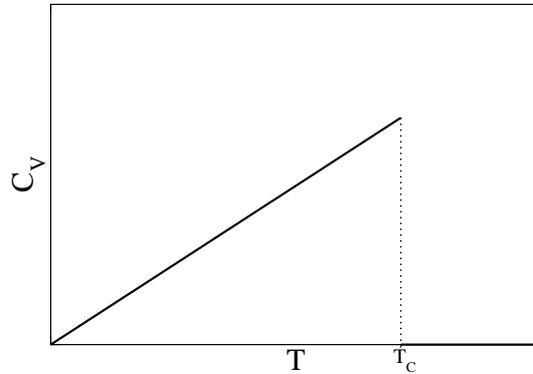


Abbildung 3: Wärmekapazität  $C_V$  als Funktion der Temperatur bei  $h = 0$ .

- d. Bei endlichem  $h$  folgt aus der Minimierung von  $F$  der Zusammenhang  $h = ma + bm^3$ . Daraus finden wir durch Ableiten nach  $h$  für die Suszeptibilität

$$1 = a\chi + 3m^2b\chi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \chi = \frac{1}{a + 3bm^2}, \quad (5)$$

so dass

$$\chi = \begin{cases} \frac{T_C}{a_0(T-T_C)}, & T > T_C \\ \frac{T_C}{2a_0(T-T_C)}, & T < T_C. \end{cases} \quad (6)$$

Am kritischen Punkt divergiert die Suszeptibilität.

- e. Abbildung 4 zeigt die Magnetisierung bei endlichem äußeren Feld für verschiedene Temperaturbereiche. Die Bedingungen  $a < 0$ ,  $a = 0$  und  $a > 0$  entsprechen jeweils  $T < T_C$ ,  $T = T_C$  und  $T > T_C$ . Deutlich erkennbar ist, dass für  $T < T_C$  in einem endlichen Intervall von  $h$  zu einem Wert des äußeren Feldes drei Werte der Magnetisierung existieren. Diese Kurve ist die Grundlage für das Phänomen der Hysterese.

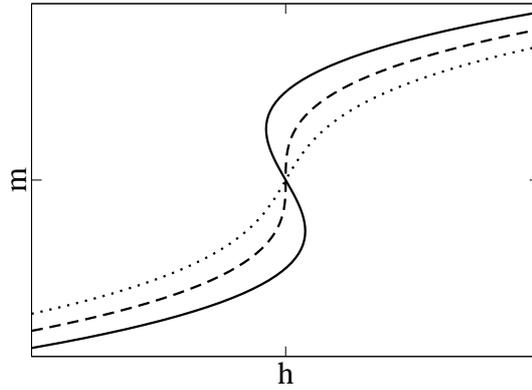


Abbildung 4: Magnetisierung  $m$  als Funktion des äußeren Feldes  $h$  für  $T < T_C$  (durchgezogen),  $T = T_C$  (gestrichelt) und  $T > T_C$  (gepunktet)

## Aufgabe 2

a. Aus der Definition der Zustandssumme  $Z_N = \text{Sp} \exp(-\beta H)$  folgt

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1}\right) \\
 &= \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_{N-1}=\pm 1} \sum_{s_N=\pm 1} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{N-2} J_i s_i s_{i+1}\right) \exp(\beta J_{N-1} s_{N-1} s_N) \\
 &= \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_{N-1}=\pm 1} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{N-2} J_i s_i s_{i+1}\right) 2 \cosh(\beta J_{N-1} s_{N-1}) \\
 &= 2 \cosh(\beta J_{N-1}) Z_{N-1},
 \end{aligned} \tag{7}$$

da  $s_{N-1} = \pm 1$  und  $\cosh(x) = \cosh(-x)$ . Damit erhalten wir

$$Z_N = Z_2 \prod_{k=2}^{N-1} 2 \cosh(\beta J_k). \tag{8}$$

Verwenden wir schließlich

$$Z_2 = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \exp(\beta J_1 s_1 s_2) = 2 \cdot 2 \cosh(\beta J_1), \tag{9}$$

so ergibt sich die kanonische Zustandssumme zu

$$Z_N = 2 \prod_{k=1}^{N-1} 2 \cosh(\beta J_k) = 2 [2 \cosh(\beta J)]^{N-1}, \tag{10}$$

wobei wir in der letzten Umformung  $J = \text{const}$  gesetzt haben.

b. Die freie Energie pro Spin lautet

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{k_B T}{N} \ln 2 - \frac{k_B T(N-1)}{N} \ln [2 \cosh(\beta J)] \approx -k_B T \ln [2 \cosh(\beta J)]. \tag{11}$$

Damit erhalten wir für die Entropie pro Spin

$$s = \frac{S}{N} = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_N \approx k_B \ln [2 \cosh(\beta J)] - \frac{J}{T} \tanh(\beta J) \tag{12}$$

und für die innere Energie pro Spin

$$u = \frac{U}{N} = -\frac{\partial}{N\partial\beta} \ln Z_N = -J \tanh(\beta J). \quad (13)$$

Die Wärmekapazität pro Spin folgt schließlich zu

$$c_V = \frac{C_V}{N} = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{J^2}{k_B T^2} \frac{1}{\cosh^2(\beta J)}. \quad (14)$$

Die Näherungen beziehen sich auf den Limes  $N \rightarrow \infty$ .

- c. Der dritte Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Entropie pro Teilchen im Grenzfalle  $T \rightarrow 0$  verschwindet. Dies ist in der Tat erfüllt, da

$$\lim_{T \rightarrow 0} s = \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ k_B \ln [2 \cosh(\beta J)] - \frac{J}{T} \tanh(\beta J) \right\} = 0. \quad (15)$$

Für  $T \rightarrow 0$  gilt  $\beta \rightarrow \infty$ , so dass  $2 \cosh(\beta J) = \exp(\beta J) + \exp(-\beta J) \approx \exp(\beta J)$ . Daher divergiert der erste Term in Gleichung (15) wie

$$\lim_{T \rightarrow 0} k_B \ln [2 \cosh(\beta J)] \approx \frac{J}{T}. \quad (16)$$

Auf der anderen Seite ist  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta J) = 1$ , woraus mit Gleichung (16) die Behauptung (15) folgt.

- d. Setzen wir  $\tau_i := s_i s_{i+1}$ , so gilt wegen  $s_i^2 = 1$

$$G(i, n) = \langle s_i s_{i+n} \rangle = \langle s_i s_{i+1} s_{i+1} \cdots s_{i+n-1} s_{i+n-1} s_{i+n} \rangle = \langle \tau_i \cdots \tau_{i+n-1} \rangle. \quad (17)$$

Die Zustandssumme läßt sich mit der *Bindungsvariablen*  $\tau$  als

$$Z_N = 2 \sum_{\tau_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\tau_{N-1} = \pm 1} \exp \left( \beta \sum_{i=1}^{N-1} J_i \tau_i \right), \quad (18)$$

schreiben, wobei der Faktor 2 daher kommt, daß die Werte  $\tau_i = \pm 1$  für jedes Paar  $s_i s_{i+1}$  zweimal angenommen werden. Für die Korrelationsfunktion erhalten wir

$$G(i, n) = \frac{1}{Z_N} \frac{\partial}{\partial \beta J_i} \cdots \frac{\partial}{\partial \beta J_{i+n-1}} Z_N = \frac{1}{Z_N} \left[ \prod_{k=i}^{i+n-1} \frac{\partial}{\partial \beta J_k} \right] Z_N = \prod_{k=i}^{i+n-1} \tanh(\beta J_k). \quad (19)$$

- e. Werten wir Gleichung (19) für konstantes  $J$  aus, so erhalten wir

$$G(i, n) = \tanh^n(\beta J). \quad (20)$$

Damit finden wir für die Korrelationslänge  $\xi$  aus dem Ansatz  $G(i, n) = \exp(-n/\xi)$

$$\begin{aligned} \xi^{-1} = -\ln[\tanh(\beta J)] &= \ln \left[ \frac{1 + e^{-2\beta J}}{1 - e^{-2\beta J}} \right] \\ &\approx \ln(1 + 2e^{-2\beta J} + e^{-4\beta J}) \approx 2e^{-2\beta J}. \end{aligned}$$

Hier haben wir in der letzten Zeile die für  $|x| \ll 1$  ( $\beta \gg 1$ ) gültigen Approximationen

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x \quad \text{und} \quad \ln(1+x) \approx x$$

benutzt und den Term  $e^{-4\beta J}$  vernachlässigt. Die Korrelationslänge

$$\xi = \frac{1}{2} e^{2\beta J} \quad (21)$$

divergiert also in erster Ordnung im Limes  $T \rightarrow 0$ , was auf einen Phasenübergang hindeutet. Einen Phasenübergang bei endlichen Temperaturen liefert erst das 2-dimensionale Ising Modell.