# Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

## Übungsblatt 12: Ferromagnet

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Ein ferromagnetisches System aus $N$ Spins kann bei tiefen Temperaturen durch die freie Energie

$$F = N\left(\frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 - hm\right)$$

modelliert werden. Hierbei ist $m$ die Magnetisierung und $h$ ein externes magnetisches Feld. Bezeichne $T_C$ die kritische Temperatur, dann ist $a(T) = a_0(T - T_C)/T_C$. Des weiteren seien $a_0, b \in \mathbb{R}^+$.

a. Skizzieren Sie $F(m)$ für die drei Fälle $T > T_C$, $T = T_C$ und $T < T_C$ bei $h = 0$.

b. Berechnen Sie $m(T)$ für $h = 0$, indem Sie die freie Energie minimieren.

c. Berechnen Sie die Entropie $S(T)$ und die Wärmekapazität $C_V(T)$ für $h = 0$ und skizieren Sie $C_V(T)$.

d. Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = (\partial m/\partial h)_{h=0}$.

e. Diskutieren Sie graphisch die Abhängigkeit der Magnetisierung $m$ vom externen Feld $h$ für die drei Fälle $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

**Aufgabe 2** (7 Punkte)

In einer Kette aus $N$ Spins mögen nur die direkt benachbarten Spins miteinander wechselwirken. Ein solches System wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1}$$

beschrieben, wobei $J_i$ die platzabhängige Stärke der Wechselwirkung und $s_i = \pm 1$ ist.

a. Berechnen Sie die kanonische Zustandsumme. Beweisen Sie dazu, dass $Z_N = 2\cosh(\beta J_{N-1})Z_{N-1}$ gilt. Werten Sie die Zustandsumme für konstantes $J$ aus, d.h. $J_l = J_k$ für $l \neq k$.

b. Berechnen Sie die freie Energie $f$, die Entropie $s$, die spezifische Wärme $c_V$ und die innere Energie $u$ pro Teilchen im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ für konstantes $J$.

c. Zeigen Sie, dass der dritte Hauptsatz erfüllt ist.

d. Die Korrelationsfunktion $G(i, n) := \langle s_i s_{i+n} \rangle$ charakterisiert den Zerfall der Spinkorrelation als Funktion des Abstandes $n$. Berechnen Sie $G(i, n)$ und zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$G(i, n) = \frac{1}{Z_N}\left[\prod_{k=i}^{i+n-1} \frac{\partial}{\partial \beta J_k}\right] Z_N\,.$$

e. Werten Sie die Korrelationsfunktion für konstantes $J$ aus und zeigen Sie, dass $G$ exponentiell abfällt, i.e. $G(i, n) = \exp(-n/\xi)$. Hierbei bezeichnet $\xi$ die Korrelationslänge. Berechnen Sie $\xi$ in führender Ordnung für kleine Temperaturen.

**Abgabetermin:** Mittwoch, 01.02.2006 vor Beginn der Vorlesung.