**10. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik"** SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel, F. Müller Abgabe: 13.07.07

---

**Klassische Theorie des Ferromagnetismus**

1. **Molekularfeldnäherung (MFA) und Landau-Entwicklung für das Ising-Modell.**

   Betrachten Sie das Ising-Modell mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn $\{nn\}$ auf einem Gitter mit $C$ Nachbarn. Die Hamiltonfunktion des Modells ist

   $$H = -J \sum_{\{nn\}} \sigma_n \sigma_{n'} - h \sum_n \sigma_n.$$

   (a) Leiten Sie aus der freien Energie pro Spin

   $$f(T,\sigma) = -k_B T \ln\left(2\cosh\frac{JC\sigma + h}{k_B T}\right) + JC\frac{m^2}{2} - hm,$$

   unter Beachtung von $\langle\sigma\rangle = m$ die MFA-Gleichung für $m$ her:

   $$m = \tanh\frac{1}{k_B T}(JCm + h).$$

   *Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\partial f/\partial m = -h$.

   (b) Betrachten Sie nun den Fall $h = 0$. Entwickeln Sie $f(T,m)$ für kleine Werte von $m$. Zeigen Sie, dass diese Entwicklung der Landau-Form

   $$f = f_0 + A(T - T_c)m^2 + Bm^4 \tag{1}$$

   entspricht. Bestimmen Sie die Koeffizienten $A$ und $B$. Bei angeschaltetem Feld würde man in Gl. (1) einen Zusatzterm $-hm$ hinzugefügen.

   (c) Bestimmen Sie das Verhalten von $m$ aus Gl. (1) im Gleichgewicht in der Nähe von $T_c$ als Funktion von $t = T - T_c$. Bestimmen Sie die Suzeptibilität pro Spin $\chi = \partial m/\partial h$ für $h \to 0$. Zeigen Sie, dass für kleine $t$ gilt:

   $$\frac{\chi(|t|)}{\chi(-|t|)} = 2.$$

   **(8 Punkte)**

2. **Domänengrenzen in der Ginzburg-Landau-Theorie**.

   Betrachten Sie nun ein System mit inhomogener Magnetisierung $m = m(\vec{r})$. Die Dichte der freien Energie verhält sich wie folgt:

   $$f(\vec{r}) = f_0 + A(T - T_c)m^2(\vec{r}) + Bm^4(\vec{r}) + C(\nabla m(\vec{r}))^2 - hm(\vec{r}),$$

   wobei $m(\vec{r})$ die ortsabhängige Magnetisierung ist und $A$, $B$ und $C$ Konstanten. Die freie Energie ergibt sich dann zu

   $$F(h,T) = \int f(\vec{r}) d^3 r$$

   und im Gleichgewicht gilt weiterhin

   $$\delta F(h,T) = 0. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie unter Verwendung des Variationsprinzips (2), dass $m(\vec{r})$ folgender Gleichung genügt:

$$C\Delta m(\vec{r}) = 2A(T - T_c)m(\vec{r}) + 4Bm^3(\vec{r}) - h.$$

(b) Betrachten Sie ein System, bei dem $m(\vec{r})$ nur von $x$ abhängt. Es gelten folgende Randbedingungen $m(-\infty) = -m_0$ und $m(+\infty) = m_0$. Bestimmen Sie die Dicke der Domänengrenze als Funktion von $(T - T_c)$ (d.h. Bereich in dem sich $m$ wesentlich ändert), wobei $m_0$ die spontane Magnetisierung im Gleichgewicht ist.

*Hinweis:* Lösungsansatz: $m(x) = C_1 \tanh C_2 x$.

**(10 Punkte)**