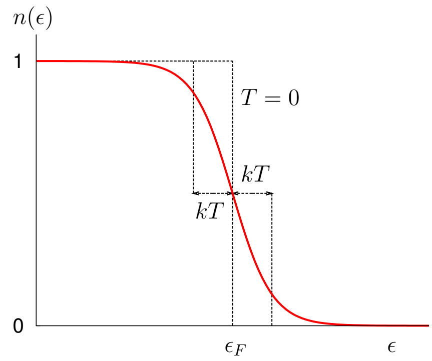
9. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik" SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel, F. Müller Abgabe: 06.07.07

1. **Fermi-Gas bei niedrigen Temperaturen.**

   Betrachten Sie ein Fermi-Gas mit Volumen V, Teilchenzahl N und Temperatur T, die niedrig gegenüber der Entartungstemperatur $T_F = e_f/k_B$ ist (e_F ist die Fermi-Energie). Die Fermi-Verteilungsfunktion $n(\epsilon)$ unterscheidet sich in diesem Fall von 0 oder 1 nur in engem Interval der Energiewerten ϵ, um die Fermi-Energie ϵ_F mit der Breite von der Ordnung kT (sieh die Skizze). Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potenzials μ, der Gesamtenergie des Systems E und der Wärmekapazität C für $T \ll T_F$.



   Nutzen Sie dafür die Relationen

$$N = \int_0^\infty \frac{\Omega(\epsilon)d\epsilon}{\exp[(\epsilon-\mu)/kT]+1}, \qquad E = \int_0^\infty \frac{\epsilon\Omega(\epsilon)d\epsilon}{\exp[(\epsilon-\mu)/kT]+1}.$$

   Hierbei ist

$$\Omega(\epsilon) = g2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{\epsilon}$$

   die Zustandsdichte eines Teilchens und $g = 2J+1$ die Spinentartungsgrad eines Energieniveaus (sieh Aufgabe 8.1).

   Hinweise: (i) Verewenden Sie die assymptotische Reihe für den Intergral

$$I = \int_0^\infty \frac{F(\epsilon)d\epsilon}{\exp[(\epsilon-\mu)/kT]+1} = \int_0^\mu F(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT^2)F'(\mu) + \ldots,$$

   und die Taylor-Entwicklung

$$\int_0^\mu F(\epsilon)d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} F(\epsilon)d\epsilon + (\mu - \epsilon_F)F(\epsilon_F) + \ldots.$$

   (ii) Nutzen Sie, dass bei absoluten Null der Temperatur $N = \int_0^{\epsilon_F}\Omega(\epsilon)d\epsilon$ gilt.

   (10 Punkte)

2. **Paramagnetismus nach Pauli.**

   Betrachten Sie ein Metall mit N Elektronen, welches sich bei der Temperatur $T = 0$ im Gleichgewicht befindet. Die Elektronen können als frei angenommen werden und nicht wechselwirken (entartetes ideales Fermi-Gas). Geben Sie zuerst die Zustandsdichte $\Omega(\epsilon)$ eines idealen Elektronengases an.

   Betrachten Sie nun Elektronen im Magnetfeld der Stärke B. Die Wechselwirkungsenergie eines Elektrons mit Spin $\uparrow$ mit dem Feld ist $+\mu_B B$, für ein Elektron mit Spin $\downarrow$ ist sie $-\mu_B B$. Die Untersysteme von Elektronen mit Spin $\uparrow$ und Spin $\downarrow$ können als zwei in Kontakt stehende Fermi-Gase verstanden werden. Im Gleichgewicht sind ihre chemischen Potentiale gleich. Die Magnetisierung eines solchen Systems ist $M = -\mu_B(N_\uparrow - N_\downarrow)$ wobei $N = N_\uparrow + N_\downarrow$ gilt.

(a) Berechnen Sie $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ als Funktion von B. Zeigen Sie, dass gilt:

$$N_\uparrow(T=0) \approx \frac{1}{2}\int_0^{\epsilon_F} \Omega(\epsilon)d\epsilon - \frac{\mu_B B}{2}\Omega(\epsilon_F)$$

$$N_\downarrow(T=0) \approx \frac{1}{2}\int_0^{\epsilon_F} \Omega(\epsilon)d\epsilon + \frac{\mu_B B}{2}\Omega(\epsilon_F)$$

mit $\mu_B B \ll \epsilon_F$.

(b) Zeigen Sie, dass die Suszeptibilität

$$\chi_{\text{Pauli}}(0) = \lim_{B\to 0} \frac{\partial M}{\partial B}$$

eines freien Elektronengases ist

$$\chi_{\text{Pauli}}(0) = \frac{3}{2}\frac{N\mu_B^2}{\epsilon_F}.$$

(10 Punkte)