8. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik" SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel, F. Müller Abgabe: 29.06.07

Bosonen und Fermionen

1. **Ideales Fermi-Gas.**

   Gegeben sei ein ideales Fermi-Gas der Temperatur T in einem Kasten, welcher das Volumen V hat.

   (a) Berechnen Sie den Fermi-Impuls p_F von N Teilchen mit Spin J in o.g. Kasten und daraus die Fermi-Energie $e_F = p_F^2/2m$.

   (b) Berechnen Sie die Energie E_F von N Teilchen, die alle Zustände bis zum Fermi-Impuls ausfüllen sollen. Geben Sie E_F in Abhängigkeit von N und e_F an.

   (c) Leiten Sie die Formel

   $$\frac{\lambda^3}{2J+1}\frac{N}{V} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(\beta e_F)^{3/2}$$

   ab, wobei λ die thermische De-Broglie-Wellenlänge ist.

   (d) In welchem Verhältnis steht die Fermienergie zu $k_B T$ bei Raumtemperatur (300K) für Kupfer ($J = 1/2$). Nehmen Sie ein Leitungselektron pro Kupferatom an.

   (10 Punkte)

2. **Fluktuation der Besetzungszahlen.**

   Der N-Teilchenzustand eines Systems lässt sich durch den Satz der Besetzungszahlen $\{n_k\} = \{n_1, n_2, \ldots\}$ der jeweiligen Einteilchenzustände mit den Energien $\{\epsilon_k\}$ beschreiben. Die Gesamtanzahl der Teilchen im System ist dann gegeben durch $N = \sum_{k=1}^{\infty} n_k$ und die Gesamtenergie des Systems lässt sich als $E = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \epsilon_k$ schreiben.

   (a) Formulieren Sie die große Zustandssumme $\Xi(T, V, \mu)$ für ein System von Bosonen, Fermionen und klassischen Boltzman-Teilchen (d.h. Bose-Einstein, Fermi-Dirac und Maxwell-Boltzman Statistiken). Wie ist in diesen drei Fällen die Wahrscheinlichkeit $P\{n_k\}$ den gegebenen Satz $\{n_k\}$ der Besetzungszahlen in dem System zu finden?

   (b) Berechnen Sie die mittlere Besetzungszahlen $\langle n_k \rangle$ in den drei Statistiken. Nutzen Sie dafür die Beziehung:

   $$\langle n_k \rangle = -k_b T \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \ln \Xi \right) \Bigg|_{z,V,\epsilon_{i \neq k}},$$

   wobei $z = \exp(\beta\mu)$ die Fugazität ist.

   (c) Bestimmen Sie die Fluktuation $\sigma_{n_k}^2 = \langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2$ der Besetzungszahlen und die relative Fluktuation $\sigma_{n_k}^2 / \langle n_k \rangle^2$ in den drei Statistiken. Verwenden Sie die Relation

   $$\sigma_{n_k}^2 = \left(-k_b T \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \right)^2 \ln \Xi \Bigg|_{z,V,\epsilon_{i \neq k}} = -k_b T \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \langle n_k \rangle \Bigg|_{z,V,\epsilon_{i \neq k}}.$$

   (10 Punkte)