6. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik" SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel, F. Müller Abgabe: 08.06.07

1. **Große Potential Φ.**

   (a) *Euler Theorem.* Eine homogene Funktion ersten Grades $F(x_1, x_2, ...)$ hat die Eigenschaft $F(\alpha x_1, \alpha x_2, ...) = \alpha F(x_1, x_2, ...)$. Zeigen Sie mittels der Taylorentwicklung und $\alpha = 1 + \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$, dass gilt

   $$F(x_1, x_2, ...) = x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots\ .$$

   Geben Sie ein Beispiel an für die homogene Funktion ersten Grades F(A,B).

   (b) *Gibbs-Duhem Relation.* Nun ist die innere Energie $U(S, V, N)$ eine extensive Funktion von den extensiven Zustandsvariablen S, V, N. Benutzen Sie die Euler Theorem und den erste Hauptsatz, um die Euler Gleichung für die innere Energie zu beweisen:

   $$U = TS - pV + \mu N.$$

   Zeigen Sie, dass die Gibbs-Duhem Relation gilt:

   $$SdT - Vdp + Nd\mu = 0.$$

   (c) Betrachten Sie ein System, das Energie und Teilchen mit einem Reservoir austauschen kann. In dieser Situation ist das chemische Potential μ die gegebene Zustandsvariable, anstatt der Teilchenzahl N. Der entsprechende thermodynamische Potential ist der große Potential Φ:

   $$\Phi = U - TS - \mu N.$$

   Geben Sie den Differential $d\Phi$ in den natürlichen Variablen. Zeigen Sie, dass $\Phi = -pV$ gilt und dass die Teilchenzahl kann berechnet werden als $N = V(\partial P/\partial \mu)_{T,V}$.

(5 Punkte)

2. **Energiefluktuationen im großkanonischen Ensemble.**

   Die innere Energie U eines Systems ist ein statistischer Mittelwert der Energien von allen Teilsystemen. Um zu bestimmen, wie scharf die innere Energie die Energieverteilung angibt, soll deren Varianz σ_E^2 im großkanonischen Ensemble bestimmt werden. Im Folgenden gilt $z = \exp(\beta\mu)$ mit $\beta = 1/k_B T$.

   (a) Zeigen Sie, dass gilt

   $$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln \Xi)_{z,V} \quad , \quad \sigma_E^2 = k_B T^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{z,V}$$

   mit der großkanonischen Zustandssumme Ξ.

(b) Mit der inneren Energie $U = U(T, V, N(T, V, z))$ lässt sich σ_E^2 bestimmen. Leiten Sie dazu aus $N = N(T, V, \mu)$ das Teilergebnis

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{z,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{V,T} \left(\frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N}\right)$$

ab. Verwenden Sie

$$\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{V,\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{V,T} \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{V,N} = -1.$$

(c) Mit Hilfe einer Maxwell-Relation aus der freien Energie erhält man einen Ausdruck für $(\partial U/\partial N)_{T,V}$ und es ergibt sich schliesslich

$$\sigma_E^2 = k_B T^2 c_V + \sigma_N^2 \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{T,V}^2$$

mit der Varianz der Teilchenzahldichte $\sigma_N^2 = k_B T (\partial N/\partial \mu)_{V,T}$. Leiten Sie diesen Ausdruck ab. Vergleichen Sie das Ergebniss mit der Energiefluktuationen im kanonischen Ensemble.

(10 Punkte)

3. **Effusion in einem idealen Gas.**

Betrachten Sie ein Gas in einem Kasten mit Volumen V, das auf konstanter Temperatur T gehalten wird. In dem dünnwandigen Kasten befindet sich ein kleines Loch der Fläche A, durch das das Gas in das den Kasten umgebende Vakuum entweichen kann.

Wie groß ist die Teilchenzahl $N(t)$ im Kasten als Funktion der Zeit t? Wie groß ist die Halbwertszeit in Abhängigkeit von A, V und T? Betrachten Sie dazu die mittlere Abnahme der Teilchenzahl $-dN(t)/dt$ unter Berücksichtigung der statistischen Impulsverteilung der Teilchen im Kasten. Teilergebnis:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{A}{V}\sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}t}$$

(5 Punkte)