5. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik" SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel, F. Müller Abgabe: 01.06.07

---

1. **Ultrarelativistisches Gas**

   Berechnen Sie die thermodynamischen Eigenschaften des ultrarelativistischen Gases, das durch die Hamiltonfunktion $H(q_n, p_n) = \sum_{n=1}^{N} |\vec{p}_n| c$ beschrieben wird. Das Gas kann mit der Umgebung Energie aber keine Teilchen austauschen.

   (a) Berechnen Sie zunächst das zu dieser Situation gehörige thermodynamische Potential und die Entropie.

   (b) Nutzen Sie dann die bekannten thermodynamischen Relationen um Druck und Temperatur zu bestimmen.

   (c) Geben Sie die Zustandsgleichung an.

   (5 Punkte)

2. **Gleichverteilungssatz**

   Das Hamiltonian eines Systems ist gegeben durch $H = \sum_{\nu=1}^{3N} (A_\nu p_\nu^2 + B_\nu q_\nu^2)$, mit generalisierten Koordinaten q_ν und Impulsen p_ν. Zeigen Sie, dass für die mittlere Energie des Systems gilt

   $$\langle H \rangle = \frac{1}{2} f k T, \tag{1}$$

   wobei $f = 6N$ die Anzahl der Freiheitsgraden ist.

   (a) Zeigen Sie zuerst, dass gilt

   $$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \left[\sum_{\nu=1}^{3N} \left\langle p_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \right\rangle + \sum_{\nu=1}^{3N} \left\langle q_\nu \frac{\partial H}{\partial q_\nu} \right\rangle \right].$$

   (b) Zeigen Sie dann, dass für zwei beliebige Koordinaten oder Impulse x_i und x_k gilt

   $$\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_k} \right\rangle = \delta_{ik} \frac{\Delta E}{\Omega} \Sigma,$$

   hierbei ist Ω die Anzahl von Mikrozuständen in der Energieschale um die Energie E mit der Stärke ΔE, und Σ ist die gesamte Anzahl von Mikrozuständen mit Energien kleiner als E. Benutzen Sie dafür die mikrokanonische Phasenraumdichte

   $$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega}, & E \leq H(\vec{x}) \leq E + \Delta E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Hinweise: (i) Das Integral $\int_{E \leq H(\vec{x}) \leq E+\Delta E} \{\ldots\} d^{6N}x$ kann mit $\Delta E \frac{\partial}{\partial E} \int_{0 \leq H(\vec{x}) \leq E} \{\ldots\} d^{6N}x$ ersetzt werden. (ii) Verwenden Sie die partielle Integration und die allegemeine Formel

   $$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{x=g(\alpha)} F(\alpha, x) dx = \int_0^{x=g(\alpha)} \frac{\partial F(\alpha, x)}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial g}{\partial \alpha} F(\alpha, g(\alpha)).$$

(c) Begründen Sie, dass man für $N \gg 1$ näherungsweise $\ln \Sigma \approx \ln \Omega$ annehmen kann. Zeigen Sie nun, dass dann gilt

$$\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_k} \right\rangle = \delta_{ik} kT,$$

und verwenden Sie diese Relation, um den Gleichverteilungssatz Eq. (1) zu beweisen.

(8 Punkte)

3. **Paramagnetismus**

Ein System besteht aus N Dipolen, welche drehbar auf fixierten Gitterplätzen platziert sind. Da Translation vernachlässigt werden soll, lautet die Energie

$$E = -\sum_{n=1}^{N} \vec{\mu}_n \cdot \vec{H}.$$

Hierbei ist $\vec{\mu}_n$ das Diplomoment des n-ten Dipols und $\vec{H}$ ein externes magnetisches Feld.

(a) Das externe Feld zeige in z-Richtung: $\vec{H} = H\vec{e}_z$. Formulieren Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, H, N)$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$Z(T, H, 1) = 4\pi \frac{\sinh(\beta\mu H)}{\beta\mu H}$$

mit $\beta = (kT)^{-1}$. Berechnen Sie die freie Energie $F(T, H, N) = NF(T, H, 1)$.

(c) Das totale Dipolmoment in z-Richtung ergibt sich aus

$$\langle D_z \rangle = N\langle \mu_z \rangle = -\frac{\partial}{\partial H} F(T, H, N).$$

Geben Sie einen expliziten Ausdruck dafür an.

(d) Verdeutlichen und diskutieren Sie die Abhängigkeit des Dipolmoments vom äußeren Magnetfeld H und der Temperatur T indem Sie $\langle D_z \rangle / (N\mu)$ über $\beta\mu H$ graphisch skizzieren.

(e) Bestimmen Sie aus der mittleren Energie $U = -\langle D_z \rangle H$ die Wärmekapazität $C_H = \frac{\partial U}{\partial T}$ bei festgehaltener Teilchenzahl und konstant gehaltenem externen Magnetfeld. Diskutieren Sie das asymptotische Verhalten von $U(T \to \infty)$ und $U(T \to 0)$. Auch hier kann eine Skizze hilfreich sein.

(9 Punkte)