Entropie in der mikrokanonischen Gesamtheit

1. **Zustandsanzahl**

   Ein freies spinloses Teilchen bewegt sich in einem eindimensionalen unendlich tiefen Potentialtopf der Länge L.

   (a) Die Anzahl der klassischen Zustände für dieses Teilchen ist gegeben durch $n_{kl} = J/V_0$. Hier ist J die Wirkungsvariable und V_0 das zuersteinmal unbekannte Volumen eines einzelnen Zustandes. Bezeichnen Sie das Volumen J näher und berechnen Sie n_{kl} in Abhängigkeit der Energie E des Teilchens.

   (b) Betrachten Sie das System quantenmechanisch und berechnen Sie die möglichen Energieniveaus des Teilchens. Wieviele Energieniveaus stehen dem Teilchen bei einer maximalen Energie E zur Verfügung?

   (c) Bei vernachlässigbar kleinen Energiestufen (klassischer Limes) geht die quantenmechanische Beschreibung in die klassische Beschreibung über. Bestimmen Sie aus diesem Übergang V_0.

   (6 Punkte)

2. **Entropie und Gaußverteilung**

   Die experimentelle Untersuchung eines Systems ergebe kontinuierliche Zufallszahlen x, deren Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ eine Gaußverteilung ist.

   (a) Zeigen Sie, dass die Entropie des Systems gegeben ist durch

   $$S = \frac{k}{2}\left(1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right)$$

   mit der Varianz σ^2. Hinweis: verwenden Sie $S = -k\int p(x)\ln p(x)dx$.

   (b) Zeigen Sie, dass bei gegebener Varianz σ^2 die Gaußverteilung genau die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, die die Entropie S maximimert.

   Hinweis: verwenden Sie die Methode der Lagrangeparameter und variieren Sie die Entropie unter Nebenbedingungen bzgl. einer allgemeinen Wahrscheinlichkeitsdichte.

   (7 Punkte)

3. **Entropie eines Photonengases**

   N Photonen mit relativistischem Impuls $\vec{p}$ befinden sich in einem dreidimensionalen Volumen. Jedes Photon hat dabei die Energie $E = |\vec{p}|c$. Das Volumen ist abgeschlossen gegenüber Energie- und Teilchenaustausch.

   (a) Die Anzahl der Zustände der Teilchen ist gegeben durch

   $$\Omega = \frac{1}{h^{3N}N!}\int_{E\leq H(q_i,p_i)\leq E+\Delta E} d^{3N}q\,d^{3N}p$$

   mit der Hamiltonfunktion $H(q_i, p_i)$. Begründen Sie den Faktor vor dem Integral anschaulich.

(b) Geben Sie die Hamiltonfunktion H der Teilchen an. Leiten Sie zunächst die Anzahl der Zustände ω für $H \leq E$ ab unter der Näherung $|\vec{p}| \approx (|p_x| + |p_y| + |p_z|)/\sqrt{3}$. Dabei entspricht $H(p_i) \leq E$ der Bedingung $\sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i| c \leq E$. Es ergibt sich

$$\omega = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \left(\frac{\sqrt{3}E}{c} \right)^{3N} \int_{\Pi} d^{3N} z$$

mit $\Pi = \{z_i, i = 1, \ldots, 3N | \sum_{i=1}^{3N} |z_i| \leq 1\}$.

(c) Man kann nun zeigen, dass

$$\int_{\sum_{i=1}^{n} |z_i| \leq 1} d^n z = \frac{2^n}{n!}$$

gilt. Berechnen Sie damit die Zustandsdichte σ und die Entropie des Systems mit den Näherungen $3N - 1 \approx 3N$ und $\Omega \approx \sigma E$. Begründen Sie diese Näherungen.

(d) Identifiert man die statistische mit der thermodynamischen Entropie, so erhält man aus den thermodynamischen Relationen $\partial S / \partial E = 1/T$ und $\partial S / \partial V = p/T$ die Energie E und den Druck p in Abhängigkeit der Temperatur T. Leiten Sie die Relationen $E(T)$ und $p(V, T)$ unter Verwendung der Stirlingformel ab.

(12 Punkte)