1. **Ergodenhypothese**

   Ein System ist ergodisch, wenn zeitliche Mittelwerte von den Anfangsbedingungen unabhängig und gleich dem Mittelwert über das Ensemble von Werten ist. Gegeben sei ein Hamilton-System mit $H(J_1, w_1, J_2, w_2) = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2$, den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$, den Wirkungsvariablen J_1, J_2 und den Winkelvariablen w_1, w_2. Dabei sind die Winkelvariablen $1-$periodisch, also $w_1 = w_1 + n,\ w_2 = w_2 + m,\ n, m \in \mathcal{Z}$. Betrachten Sie im Folgenden einen zweidimensionalen Phasenraum, der von den Winkelvariablen aufgespannt wird. Bestimmen Sie $w_1(t)$ und $w_2(t)$. Zeigen Sie, dass die Ergodenhypothese wahr (falsch) ist für irrationale (rationale) Verhältnisse zwischen α_1 und α_2.

   (3 Punkte)

2. **Information**

   Bei einer experimentellen Messung eines einzelnen Wertes ist die erhaltene Information umso größer, je größer die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist. Man kann auch sagen, je größer die Unsicherheit der Messung ist, desto größer ist die durch die Messung erhaltene Information.

   (a) Liegen zwei Mengen mit R_{01} und R_{02} möglichen Realisierungen vor, aus denen jeweils bei einer Messung ein Wert erhalten wird, so ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten $R_0 = R_{01} \cdot R_{02}$. Da man aus beiden Messungen jeweils eine gewisse Informationsmenge erhält, ist die gesamte erhaltene Information I die Summe der beiden, also $I(R_0) = I(R_{01}) + I(R_{02})$. Es kann gezeigt werden, dass es nur einen einzigen mathematischen Zusammenhang zwischen der erhaltenen Information I und der Zahl der Möglichkeiten R_0 gibt, der diese Gleichungen erfüllt. Geben Sie diesen an.

   (b) In einem Experiment sind N Werte gemessen worden, wobei nur zwei Realisierungen möglich sind. Zeigen Sie, dass wenn es darunter N_1 Realisierungen vom einen Typ und N_2 Realisierungen vom anderen Typ gibt, so gibt es insgesamt $R = N!/(N_1!N_2!)$ mögliche Realisierungen für die Sequenz der N Messwerte. Zeigen Sie, dass es für die erhaltene Information pro Wert gilt:

   $$i = \frac{I}{N} \approx -K\left(\frac{N_1}{N}\ln\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N}\ln\frac{N_2}{N}\right).$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung $I = K \ln R$ and die Stirling-Formel $\ln Q! \approx Q(\ln Q - 1)$.

   (c) In einem Experiment sind N Werte gemessen worden, wobei L verschiedene Realisierungen möglich sind. Wir definieren die Wahrscheinlichkeit $p_l = N_l/N, l = 1..L$ für den Typ l. Zeigen Sie, dass aus den Überlegungen der vorigen Aufgabe folgt

   $$i = -K\sum_{l=1}^{L} p_l \ln p_l.$$

   (3 Punkte)

3. **Information und Lyapunov-Funktion**

Ein Teilchen befindet sich in einem eindimensionalen Gitter mit N Gitterstellen. Dabei $p(m,t)$ mit $m = 1,..,N$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen zur Zeit t im Gitterpunkt m befindet. Die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(m,t)$ ist gegeben durch die Master-Gleichung:

$$\frac{\partial p(m,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} w_1(m|n)p(n,t) - w_2(n|m)p(m,t). \tag{1}$$

Hier sind $w_1(m|n)$ und $w_2(n|m)$ die Übergangsraten, dass das Teilchen von Zelle m nach Zelle n bzw. von Zelle n nach Zelle m springt. Im Folgenden sollen diese Übergangsraten gleich sein, i.e. $w_1(m|n) = w_2(n|m) = w$.

(a) Berechnen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_0(m)$, d.h. $\partial p_0/\partial t = 0$.

(b) Die Information eines Systems ist allgemein gegeben mit $I = -K\sum_m p(m)\ln p(m)$. Nun wähle man eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1(m,t)$. Zeigen Sie, dass dann die Differenz der Informationsmaße von p_0 und p_1 gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V(t) &= -K\sum_{m=1}^{N} p_0(m)\ln p_0(m) + K\sum_{m=1}^{N} p_1(m,t)\ln p_1(m,t) \\ &= K\sum_{m=1}^{N} p_1(m,t)\ln\frac{p_1(m,t)}{p_0(m)}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $V \geq 0$.

(c) Eine Funktion $V_L(q(t))$ sei stetig differenzierbar in einem Gebiet $\mathcal{U}$ um den Ursprung $q = 0$ mit $V_L(0) = 0$. Weiterhin soll $V_L(q) \geq 0$ für $q \neq 0$ in einer Umgebung $\mathcal{U}$ gelten. Zeigen Sie, dass wenn $q(t)$ der Bewegungsgleichung $dq(t)/dt = F(q)$ gehorcht, dann gilt es:

$$\frac{dV_L}{dt} = \frac{\partial V_L}{\partial q}F(q)$$

Gilt nun weiterhin $dV_L/dt \leq 0$ in $\mathcal{U}$, so ist der Punkt $q = 0$ stabil und V_L heißt Lyapunov-Funktion. Identifizieren Sie $q(t)$ mit $p_1(m,t)$, die zugehörige Differentialgleichung mit Gleichung (1) und zeigen Sie unter Prüfung der angegebenen Eigenschaften, dass die Funktion V aus Gl. (2) eine Lyapunov-Funktion ist.

Hinweis: $\ln x \geq 1 - 1/x$.

(d) Was bedeutet dies anschaulich für die zeitliche Dynamik jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_1(m,t)$ in einem solchen System?

(6 Punkte)