1. Übungsblatt zur Vorlesung "Statistische Physik" SS07

Prof. Dr. L. Schimansky-Geier, Dr. T. Engel Abgabe: 27.04.07

1. **Binomial- und Gaußverteilung**

Ein großes System bestehe aus $N \gg 1$ Teilchen, mit N_A Teilchen der Sorte A und $N_B = N - N_A$ Teilchen der Sorte B. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Teilchen zur Sorte A gehört, ist dann $x = N_A/N$.

(a) Zeigen Sie, dass dieWahrscheinlichkeit $P(n_A)$, in einer Stichprobe von n zufällig ausgewählten Teilchen ($n \ll N$) genau n_A Teilchen der Sorte A zu finden, gegeben ist durch:

$$p(n_A) = \frac{n!}{n_A!(n-n_A)!} x^{n_A}(1-x)^{n-n_A}. \tag{1}$$

(b) Der Anteil der A-Teilchen in der Stichprobe ist $x_A = n_A/n$. Für $n \gg 1$ ist $p(x_A)$ näherungsweise durch eine Gaußverteilung gegeben:

$$p(x_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_A-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Parameter μ und σ dieser Verteilung sind: $\mu = x$ und $\sigma = \sqrt{x(1-x)/n}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Stirling-Formel[1]. Sie können dann beide Seiten der Gl. (1) logarithmieren und geeignet bis zur 2. Ordnung in $\delta x = x_A - x$ entwickeln.

(5 Punkte)

2. **Multinomialkoeffizienten**

(a) Verallgemeinern Sie nun das Ergebnis aus Aufgabe 1a auf die Aufteilung der Objekte in 3 Gruppen.

Hinweis: Fassen Sie zunächst zwei Gruppen zu einer zusammen und teilen Sie dann die zusammengefaßte Gruppe neu auf.

(b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis auf die Aufteilung in $k+1$ Gruppen. Aus n unterschiedbaren Objekten sollen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Objekte (mit $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$) in k Gruppen ausgewählt werden. Wie groß ist die Zahl der Möglichkeiten

$$M(N, \{m_i\}) \tag{3}$$

k solche Gruppen mit jeweils $\{m_i\}$ Mitgliedern aus n Objekten zu bilden?

[1] $x! \approx \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}$

(c) Begründen Sie, warum die Koeffizienten des Multinomials $\left(\sum_{i=1}^{k} p_i + 1\right)^n$ für eine bestimmte Kombination $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_k^{m_k}$ genau durch den Multinomialkoeffizienten M gegeben ist.

(d) Eine Polymerkette der Länge $N = 100$ sei aus drei verschiedenen Spezies A, B und C im Verhältniss 33:33:34 zusammengesetzt. Wie viele Konfigurationen sind möglich?

(5 Punkte)