Wärme-Übung 7

Daniel Sachse

1) $Z(E) = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}}$

(a)

wg. $E_j = \mu H (S_1 + S_2 + \ldots + S_N)$

ist

$$Z(E) = \underbrace{\left(\sum_{S_1=\pm} e^{-xS_1}\right)}_{=2\cosh x}\left(\sum_{S_2=\pm} e^{-xS_2}\right)\ldots\left(\sum_{S_N=\pm} e^{-xS_N}\right) \qquad \left[x \equiv \frac{\mu H}{kT}\right]$$

$$= (2\cosh x)^N$$

$$\Rightarrow F = -NkT \ln\left(2\cosh\frac{\mu H}{kT}\right) \checkmark$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T = -NkT\,\frac{\frac{\mu}{kT}\sinh\frac{\mu H}{kT}}{\cosh\frac{\mu H}{kT}} = -N\mu\tanh\frac{\mu H}{kT} \checkmark$$

Fehler in der Aufg.

(b) $\left(\sum_{S_j=\pm} e^{-xS_j}\right) \rightarrow \left(\int d\Omega_j\, e^{-x\cos\Theta_j}\right)$, dann ist

$$Z(E) = \left(\int d\Omega_1\, e^{-x\cos\Theta_1}\right)\cdot\ldots\left(\int d\Omega_N\, e^{-x\cos\Theta_N}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} d\Omega = d\varphi \sin\Theta\, d\Theta = -d\varphi\, d\cos\Theta \\ \Rightarrow -\int_1^{-1} d\cos\Theta\, e^{-x\cos\Theta} = \left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\right]_{y=-1}^{1} = \frac{2\sinh x}{x} \end{array}\right]$$

$$= \left(4\pi\,\frac{\sinh\frac{\mu H}{kT}}{\frac{\mu H}{kT}}\right)^N \Rightarrow F = -NkT\left\{\ln\frac{4\pi kT}{\mu H} + \ln\sinh\frac{\mu H}{kT}\right\} \checkmark$$

$$\Rightarrow M = -NkT\left\{-\frac{1}{H} + \frac{\mu}{kT}\operatorname{arctanh}\frac{\mu H}{kT}\right\} \checkmark$$

Wä-Ü7

A2 $Z = \frac{1}{h^{3N} N!} V^N \int d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N \, e^{-\beta \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m}}$

$$\left[= \int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}N}$$

$$\Rightarrow F = -kT \ln Z = -NkT \left\{ \ln \frac{V}{Nh^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} + 1 \right\} \quad (*)$$

$$\Rightarrow G = F + pV = F - \frac{\partial F}{\partial V} \cdot V$$

$$= F + NkT = -NkT \ln \frac{V}{Nh^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

und mit $V = \frac{NkT}{p}$ (ideales Gas)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu = \frac{G}{N} = -kT \ln \frac{kT}{ph^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}}} = \mu(p,T)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk\{\dots\} + Nk\frac{3}{2} \quad (**)$$

$$= \frac{5}{2} Nk + Nk \ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{2} Nk + Nk \ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2} \right)^{3/2} \right)}} \quad (\Delta)$$

$$= S(U,V)$$

$$\underline{\underline{U = F + TS \overset{(*),(**)}{=} \frac{3}{2} NkT}}$$

, aber müssen noch (Δ) nach $U(S,V)$ umstellen:

$$e^S = e^{\frac{5}{2}Nk} \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2} \right)^{3/2} \right)^{Nk} \Rightarrow e^{\frac{2S}{3Nk}} = e^{\frac{5}{3}} \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\pi m}{3Nh^3} \right) U$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U = e^{\frac{2}{3}\frac{S}{Nk} - \frac{5}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3Nh^2}{4\pi m} \right)}} = U(S,V)$$

Damit werden

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} N k$$

und $$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NkT}{V}$$ im Einklang mit der id. Gasgleichung

Zur 2a)

Zustandssumme bei kontinuierlichen Energien → Integral mit $\frac{1}{h}$ pro Dimension.

Vorfaktor $\frac{1}{N!}$ „tilgt" wg. Ununterscheidbarkeit der Partikel identische Gaszustände!

✓ [illegible]