# Übungen zur Thermodynamik

**7. Blatt 1. Juni. 2005**

Abgabe 8. Juni, Postfach "Thermo" neben Raum 1.4.16

---

### Magnetisierung eines Paramagneten

**1.** Die Energie $E$ von $N$ Spins $S_n$ in einem Magnetfeld $H$ ist durch

$$E = -\mu \sum_{n=1}^{N} \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_n$$

gegeben. Berechnen Sie die freie Energie $F = -k_B T \ln Z$ und Magnetisierung $M = -(\partial F/\partial H)_T$

(**a**) für Isingspins, d.h., $S_n = \pm 1$ und hat damit nur zwei Orientierungen bezüglich des Magnetfelds $H$, entweder parallel oder antiparallel zu $H$.

(**b**) für Heisenbergspins, d.h., $\mathbf{S}_n = (S_n^x, S_n^y, S_n^z)$ sind dreidimensionale Vektoren der Länge $|\mathbf{S}_n| = 1$. $\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_n$ in $(*)$ ist in diesem Fall das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren $\mathbf{S}_n$ und $\mathbf{H}$, so daß man über alle Richtungen der Vektoren $\mathbf{S}_n$ mitteln oder integrieren muß, um die Zustandssumme $Z$ zu berechnen.

### Zustandsintegral und Thermodynamische Potentiale für das ideale Gas

**2.** Betrachten Sie zunächst die generellen Formel für das Zustandsintegral eines realen Gases

$$Z(N, V, \beta) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d^3x_1 \ldots d^3x_N \, d^3p_1 \ldots d^3p_N \, \exp\left(-\beta H(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)\right) \quad (*)$$

aus $N$ Teilchen derselben Sorte im Volumen $V$ und $\beta = 1/k_B T$. Die Hamiltonfunktion mit Impuls $\mathbf{p}$ und Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen $\mathcal{V}$ ist

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathcal{V}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \ .$$

Die Ortsintegration ist wegen der Potentiale technisch kaum durchzuführen, während die Impulsintegration keine Probleme bereitet. Mit $\mathcal{V} \equiv 0$, dh. für ideale Gase, läßt sich jedoch das Zustandsintegral ohne Schwierigkeiten bestimmen.

(**a**) Begründen Sie die Form $(*)$ der "Zustandssumme".

(**b**) Berechnen Sie daraus für das ideale Gas die folgende thermodynamische Potentiale:
Freie Energie $F = -k_B T \ln Z$,
Innere Energie $U$, Entropie $S$ und chemisches Potential $\mu$.

*Hinweis*: Formell gilt für die Innere Energie $U = -(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z)_V$ und für das Gibbssches Potential $G = \frac{1}{\beta} \left( V (\frac{\partial}{\partial V}) \ln Z)_\beta - \ln Z \right)$ mit $\mu = G/N$. Möglicherweise sind andere Beziehungen vorteilhafter.

(**c**) Wie sehen $U$, $S$ und $\mu$ in ihren "natürlichen" Variablen aus?

(**d**) Bestimmen Sie mit den Ergebnissen von (b) Druck und spezifische Wärme.