Übungen zur Thermodynamik

6. Blatt 25. Mai. 2005

Abgabe 1. Juni, Postfach "Thermo" beim Raum 1.4.16

Probleme mit Wahrscheinlichkeiten

1) In dem Buch "The man who loved only numbers" von Paul Hoffman, das eine Biographie des Mathematikers Paul Erdős ist, findet man folgendes Problem dargestellt:
You're on a game show and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, and behind the others are goats. You choose, say, door 1, and the host, who knows where the car is, opens another door, behind which is a goat. He now gives you the choice of sticking with door 1 or switching to the other door? What should you do? This was the so called Monty Hall dilemma faced by guests on Monty Hall's classic TV game show *Let's Make a Deal*, only the consolation prizes weren't goats.
A columnist *Marilyn vos Savant* in the magazine *Parade*, Sept. 9, 1990, adviced to switch doors. Sticking with the first choice gives one third chance of winning, she said, but switching doubles the odds to two–thirds. To convince her readers, she asked them to imagine a million doors. "You pick door No. 1," she said. "Then the host, who knows what's behind the doors and will always avoid the one whith the prize, opens them all except door No. 777 777. You'd switch to the door pretty fast, wouldn't you?
Paul Erdős war der Meinung, daß die Gewinnchance sich beim Wechseln zur anderen Tür nicht vergrößert, daß sie also für beide Fälle $\frac{1}{2}$ ist, eine Meinung, die von vielen Lesern von *Parade*, zu urteilen nach ihren Zuschriften, geteilt wurde.
Wer hat recht? Annalysieren Sie dieses Problem, um die Tücken bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeit zu meistern. Ist die Argumentation mit einer Vielzahl von Türen richtig?

Wahrscheinlichkeit, Information & Entropie

2) Für die Information I, die ein langer Text der mit Einsen und Nullen geschrieben ist enthält, kann man nach Shannon den folgenden Wert erwarten:

$$I \;=\; -N\big(p\log_2 p \,+\, (1-p)\log_2(1-p)\big)\;,$$

wobei N die Länge des Textes und p die Wahrscheinlichkeit ist, mit der die Eins vorkommt. Die Information ist der Logarithmus der möglichen Texte und damit gleich der Anzahl der Fragen, die man stellen muß, um den Text zu erraten. Sie wird in *bit* angegeben, dh. $\log_2 p = \ln p/\ln 2$ bezeichnet den Logarithmus zur Basis 2.
Betrachtet man ein "Gittergas", bei dem es N Plätze gibt auf denen $N_g < N$ Gasatome verteilt sind und auf jeder Stelle findet höchstens ein Atom Platz, dann kann man nach Boltzmann für die Entropie S (k_B ist die Boltzmannkonstante)

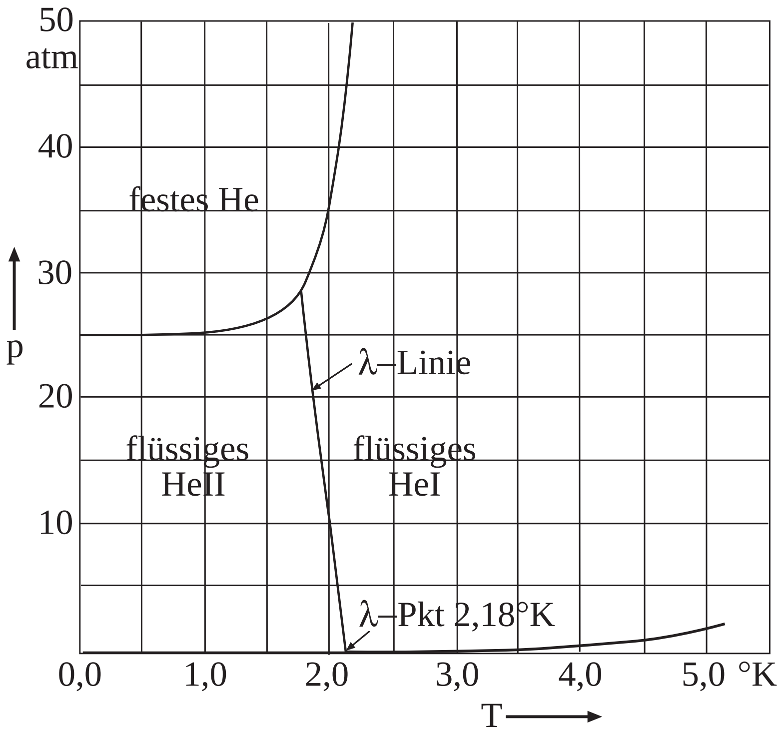
$$S \;=\; -Nk_B\big(c\ln c \,+\, (1-c)\log_2(1-c)\big)$$

finden. Dies ist gleich dem Logarithmus (multipliziert mit k_B) der Möglichkeiten N_g gleiche Atome auf N Plätzen zu verteilen. Dabei ist $c = N_g/N$ die Konzentration der Atome und $1-c$ die Konzentration der leeren Plätze. Prüfe Sie diese Behauptung nach! Als Beispiel kann man atomaren Wasserstoff nehmen, der sich in einen Metall auf Zwischengitterplätzen aufhält.
Berechnen Sie das chemische Potential μ für geringe Konzentrationen $c \ll 1$, bei denen die Wechselwirkung wie bei einem idealen Gas zwischen den Gasatomen vernachlässigt werden kann, so daß die freie Energie als $F = N_g\,u(T) - T\,S$ angesetzt werden kann. Vergleichen Sie das Resultat mit dem chemischen Potential eines idealen Gases.
Hinweis: $\mu = \partial F/\partial N_g$

Clausius–Clapeyron Gleichung & Nernstsches Theorem

3) Was können Sie aus nebenstehenden Phasendiagramm von ^{4}He für die latente Schmelzwärme $\Delta q = T\,\Delta s$ von festen ^{4}He ableiten? Benutzen Sie dazu die Clausius–Clapeyron Gleichung. Entspricht das Ergebnis dem dritten Hauptsatz?

Die Figur befindet sich z.B. in Bergmann & Schäfer Mechanik, Akustik, Wärme, Kap. Eigenschaften des flüssigen Heliums (MEC–10/5 Stud.Bibl.)



$(p,\,T)$–Diagramm für He^4