Daniel Sachse 3.5.05

Thermo: Übung 2

Aufgabe 1)

a) Es gelten

(A) $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy = M\,dx + N\,dy$

und

(B) $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$.

Aus (A) folgt durch Koeff.-vergleich:

$M = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y$; $N = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_y$; einsetzen in (B)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$ Der Satz von Schwarz!

Also ist U mindestens 2 mal stetig differenzierbar, mithin auch integrierbar.

b) $M \equiv \frac{y^2}{x} - 2$, $N \equiv 3y - \frac{x}{y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} \neq -\frac{1}{y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$; kein vollst. Differential

Allerdings ist mit dem Faktor $(x \cdot y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(M x y) = 3y^2x - 2x = \frac{\partial}{\partial x}(N \cdot xy)$$

Sehr gut, passt!

Ulrike

Angeblich lässt sich mathematisch immer ein integrierender Faktor finden. Allerdings müsse man zur tatsächlichen Bestimmung manchmal auf numerische Verfahren zurückgreifen. ✓

Aufgabe 2)

Durch Wegwerfen quadratischer kleiner Größen werden:

Euler: $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dx} = 0$ (A) $\Big| \frac{d}{dx}(\ldots)$, $\cdot \rho_0$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{d^2}{dx\,dt} v + \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \quad (A')$$

Kontinuität: $\frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \frac{dv}{dx} = 0$ (B) $\Big| \frac{d}{dt}(\ldots)$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\rho + \rho_0 \frac{d^2}{dx\,dt} v = 0 \quad (B')$$, Differenz (A') − (B')

(D): $\frac{d^2}{dx^2}p - \frac{d^2}{dt^2}\rho = 0$, benutze nun: ✓

$$p_0 \rho_0^{-\gamma} = p \cdot \rho^{-\gamma} = (p_0 + dp)(\rho_0 + d\rho)^{-\gamma}$$

Taylor... $\cong p_0 \rho_0^{-\gamma} + dp\,(\rho + d\rho)^{-\gamma} + d\rho\,(p_0 + dp)(-\gamma)(\rho_0 + d\rho)^{-\gamma-1}$

$$\Rightarrow 0 = -\gamma\, d\rho \underbrace{(p_0 + dp)}_{\cong p_0} + dp \underbrace{(\rho_0 + d\rho)}_{\cong \rho_0}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d\rho}{\rho_0} = \frac{dp}{p_0} \checkmark \text{, in (D): } \overbrace{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}}^{=\frac{1}{c^2}} \frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{d^2 p}{dx^2} = 0 \checkmark$$

$$\gamma = \frac{5+2}{5}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \text{ ; mit } p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa},\ \rho_0 \cong 1{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \Rightarrow c_{\mathrm{Luft}} \cong 328\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \checkmark$$