Daniel Sachse ①
3777491 27.4.05

Wärme - Blatt 1

Aufgabe 1

Annahmen: • $pV = \text{const} = p_0 V_0 \overset{N=\text{const}}{\Rightarrow} p \cdot \rho_0 = p_0 \cdot \rho$ (1)

• $dp = -g \rho \, dh$ (2)

In (2) für ρ (1) einsetzen:

$$\Rightarrow dp = -g \frac{\rho_0}{p_0} p \, dh$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dh} = -g \frac{\rho_0}{p_0} p \quad (\text{DGL}: 3)$$

Ansatz: $p(h) = A e^{-Bh} \Rightarrow p'(h) = -ABe^{-Bh}$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} 0 = -AB + Ag\frac{\rho_0}{p_0} \Rightarrow B = g\frac{\rho_0}{p_0}$$

Fordere ferner: $p(h=0) \overset{!}{=} p_0 \Rightarrow p_0 = A \cdot e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}\cdot 0} = A$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{g \rho_0}{p_0} \cdot h} =: p_0 e^{-\frac{h}{h_0}} \quad ✓$$

... mit $h_0 = \frac{p_0}{g \cdot \rho_0}$; $p_0 \approx 10^5 \,\text{Pa}$, $\rho_0 (\text{Stickstoff}) \approx 1{,}2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\Rightarrow h_0 \approx 8500 \,\text{m}$$

Damit ist der Druck in 100 m Höhe:

$$p(100\,\text{m}) \approx 98830 \,\text{Pa} \Rightarrow \Delta p \approx 1170 \,\text{Pa} \quad ✓$$

Aufgabe 2

$f(x,y,z) \overset{!}{=} 0$, Stelle so definierte Fläche lokal als Tangentialebene dar:

$$f(x,y,z) \approx \underbrace{f(x_0,y_0,z_0)}_{=0 \text{ auf Fläche}} + (\vec{\nabla} f)(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}_0)}_{=:\alpha}(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}_0)}_{=:\beta}(y-y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}_0)}_{=:\gamma}(z-z_0)$$

$$\Rightarrow \underline{0 \overset{!}{=} \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)}$$

$$\curvearrowright \quad x = x_0 - \frac{1}{\alpha}\left\{\beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)\right\}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{\beta}\left\{\alpha(x-x_0) + \gamma(z-z_0)\right\}$$

$$z = z_0 - \frac{1}{\gamma}\left\{\beta(y-y_0) + \alpha(x-x_0)\right\}$$

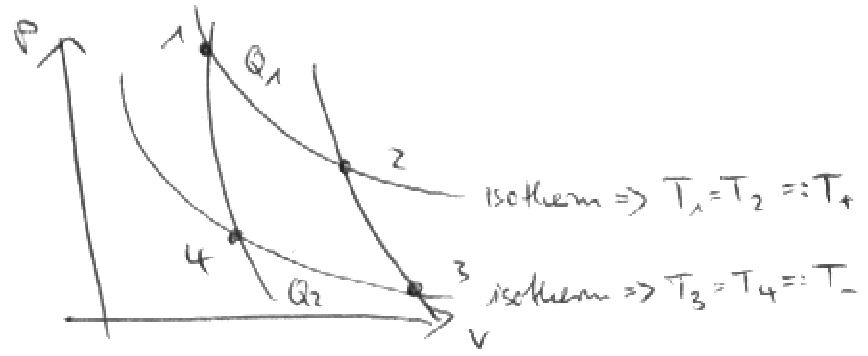
$$\curvearrowright \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \Bigg\| \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{\gamma}{\beta} \quad \Bigg\| \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\beta\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right) = \underline{\underline{-1}}$$

wie schön! ✓

Daniel Sadusl ②
3777491 27.4.05

Aufgabe 3



$$\oint p\,dV = \omega \; ; \quad \eta = \frac{\omega}{Q_1}$$

isotherme: $p \cdot V = \text{const} = p_1 V_1 = p_2 V_2$ bzw. $p_3 V_3 = p_4 V_4$ (A)

adiabate: $p \cdot V^{\varkappa} = \text{const} = p_1 V_1^{\varkappa} = p_4 V_4^{\varkappa}$ bzw. $p_2 V_2^{\varkappa} = p_3 V_3^{\varkappa}$ (B)

$$\oint p\,dV = \int_1^2 p\,dV + \underbrace{\int_2^3 p\,dV}_{=0} + \int_3^4 p\,dV + \underbrace{\int_4^1 p\,dV}_{=0}$$
wg. Adiabaten: $\Delta Q = 0$

Berechne:

$$Q_1 = \int_1^2 p\,dV = p_1 V_1 \int_1^2 \frac{1}{V}\,dV = p_1 V_1 \left[\ln V\right]_1^2$$

$$Q_2 = \text{analog} = p_3 V_3 \left[\ln V\right]_3^4$$

$$\Rightarrow \omega = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_2} - p_3 V_3 \ln \frac{V_3}{V_4}}{p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

mit $p_j V_j = R T_j$
und $T_+ = T_1 = T_2$
$T_- = T_3 = T_4$

$$\eta = \frac{T_+ \ln \frac{V_2}{V_1} - T_- \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_+ \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad , \ldots$$

→

Schmeißen wir noch die Logarithmen raus:

Wir hatten als (B):

$$\left.\begin{aligned} p_1 V_1^{\varkappa} &= p_4 V_4^{\varkappa} \\ p_2 V_2^{\varkappa} &= p_3 V_3^{\varkappa} \end{aligned}\right\} \text{dividieren} \Rightarrow \underbrace{\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}}_{=1 \text{ wg. (A)}} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \underbrace{\frac{p_4 V_4}{p_3 V_3}}_{=1 \text{ wg. (A)}} \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\varkappa-1}$$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3}$ und damit wird

$$\eta = \frac{T_+ - T_-}{T_+}$$

√

[illegible]