Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2010/2011 Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 13.12.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

Geben Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen für $x \ll 1$ bis zur vierten Ordnung an:

$$f_1(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad ; \quad f_3(x) = (1-x)^{5/2}$$

Aufgabe 2: Pendelperiode (4+6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Pendelperiode für den Fall berechnet, dass das Pendel Schwingungen und keine Rotationen ausführt. In dieser Aufgabe wollen wir den Fall von Rotationen betrachten.

(a) Geben Sie durch eine einfache Energiebetrachtung an, für welche Energien E des Pendels die Bewegung rotationsartig ist.

(b) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus der Energieerhaltung die Relation

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}[E - mg\ell(1-\cos\varphi)]}$$

folgt. Zeigen Sie zunächst, dass daher die Periode der Rotationen durch

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}[E - mg\ell(1-\cos\varphi)]}}$$

gegeben ist. Zeigen Sie nun, dass die Rotationsperiode für große Energien genähert werden kann durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{2E}}\left(1 + \frac{mg\ell}{2E} + \dots\right). \tag{1}$$

Aufgabe 3: Wasserrutsche (10 Punkte)

In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und sechs volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem. (Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.)

Aufgabe 4: Elliptische Integrale – Fortsetzung (10 Punkte)

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte X, für deren Abstände von den zwei Brennpunkten A und B

$$\overline{XA} + \overline{XB} = \text{konst.}$$

gilt. Analog ist die Lemniskate durch

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = a^2$$

definiert. Zeigen Sie zunächst, dass die Lemniskate in kartesischen Koordinaten durch

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

sowie in Polarkoordinaten durch

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

beschrieben wird, wenn die Brennpunkte bei $(\pm a, 0)$ liegen. Skizzieren Sie die Lemniskate. Zeigen Sie, dass ihr Umfang durch das vollständige elliptische Integral erster Art

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

mit $K^2 = 1/2$ dargestellt werden kann.