

Abgabetermin: Montag, 6.12.2010, *Anfang* der Vorlesung (d.h. spätestens 12:15)

---

## Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von  $x$ :

$$\log_a(x^3) \quad ; \quad a^{\sin x} \quad ; \quad \arcsin x \quad (1)$$

Hierbei sollen Sie nur die elementaren Ableitungen von  $e^x$ ,  $\ln x$  sowie  $\sin$  und  $\cos x$  als bekannt voraussetzen.

(b) Zeigen Sie, warum sich die allgemeine Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen zusammensetzt aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung sowie einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

## Aufgabe 2: Energie des gedämpften harmonischen Oszillators (10 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtenergie des gedämpften harmonischen Oszillators als Funktion der Zeit. Sie dürfen annehmen, dass der Oszillator *sehr* schwach gedämpft ist, d.h.  $\gamma \ll \omega$ .

## Aufgabe 3: Freier Fall (10 Punkte)

Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den freien Fall mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes sowie Trennung der Variablen wie in der Vorlesung besprochen. Als Anfangsbedingungen seien  $z(t_0 = 0) = 0$  sowie  $\dot{z}(t_0 = 0) = v_0$  ( $v_0 > 0$ ) gegeben.

## Aufgabe 4: Elliptische Integrale (10 Punkte)

In der Vorlesung werden im Zusammenhang mit dem Pendel elliptische Integrale auftreten. Diese Aufgabe soll den geometrischen Ursprung dieses Namens beleuchten. Zeigen Sie, dass der Umfang einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist durch das vollständige elliptische Integral zweiter Art

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}$$

mit  $K^2 = 1 - b^2/a^2$ .