Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2010/2011 Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 29.11.2010, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+2+3 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Reihen um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung an (d.h. inklusive des Terms $\sim (x - x_0)^4$):

$$(1-x^2)e^{-x^2} \quad ; \quad \ln(1+x^2) \quad ; \quad \frac{1}{1+\sin x} \quad ; \quad e^{-1/x^2} \quad ; \quad x \coth x$$

(b) Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen an

$$z = 2+2i \quad ; \quad z = 3i \quad ; \quad z = -4 \quad ; \quad z = \tfrac{(2+3i)(2-3i)}{1+i}$$

(c) Wir haben die komplexen Zahlen eingeführt, um Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen zu können. Im Reellen ist es ebenso unmöglich, den Logarithmus einer negativen Zahl zu definieren. Im Komplexen gelingt auch dies. Zeigen Sie, dass für eine positive reelle Zahl $x > 0$ gilt

$$\ln(-x) = \ln x + i\pi.$$

(Sie sollten nach Beantwortung dieser Frage verstanden haben, wie man ganz allgemein den Logarithmus $\ln z$ einer komplexen Zahl z berechnet. Es lohnt sich, darüber nachzudenken, wie ein- bzw. vieldeutig der Logarithmus einer komplexen Zahl ist.)

Aufgabe 2: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (5+5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich reibungsfrei in der xy Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\mathbf{F} = -D\mathbf{r}.$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie die Gleichungen.

(b) Wann tritt Kreisbewegung ein? Welche Frequenz hat sie? Wann tritt eine Bewegung im Winkel von 45 Grad zu den Achsen ein und welche Frequenz hat sie?

Aufgabe 3: Geladenes Teilchen im Magnetfeld (5+5 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m unterliegt im Magnetfeld $\mathbf{B}$ der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Das homogene Magnetfeld soll in die $\hat{\mathbf{z}}$-Richtung zeigen, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Geben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung an.

(b) Lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung (allgemeine Lösung) und beschreiben Sie die resultierende Bewegung. (Hinweis: Versuchen Sie die Bewegungsgleichung auf die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators zurückzuführen.)

Aufgabe 4: Gekreuzte Felder (10 Punkte)

Erweitern Sie die Situation in Aufgabe 3 um ein homogenes elektrisches Feld in die x-Richtung, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$, so dass insgesamt eine Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf das Teilchen wirkt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese. In welche Richtung bewegt sich das Teilchen im Mittel, wenn die z-Komponente ihrer Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet.