Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2010/2011 Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 15.11.2010, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (3+3+4 Punkte)

(a) Vereinfachen Sie

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}} \quad ; \quad \frac{1}{\cosh x+\sinh x} \quad ; \quad \frac{x^3+6x^2-x-30}{x+5}$$

(Das Ergebnis soll keine Brüche mehr enthalten.)

(b) Integrieren Sie

$$\int dx\ \sinh(2x)\cosh x \quad ; \quad \int dx\, x\, e^{-4x^2} \quad ; \quad \int dx\, t^{x+3}$$

(c) Für eine Kreisbewegung gelte $\ddot{\varphi} = a$, wobei a eine Konstante sei. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $\varphi = 0$ sowie $\dot{\varphi} = 0$. Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit ω sowie den Winkel φ zur Zeit t an.

Aufgabe 2: Drehimpuls (3+3+4 Punkte)

Geben Sie einen Ausdruck für den Drehimpulsvektor

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$$

an in

(a) Polarkoordinaten (hier: für eine ebene Bewegung; in welche Richtung zeigt der Drehimpulsvektor?)

(b) Zylinderkoordinaten

(c) Kugelkoordinaten

Aufgabe 3: Reibung für schnelle Teilchen (4+4+2 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen, das sich schnell durch ein viskoses Medium (Flüssigkeit oder Luft) bewegt. Nehmen Sie an, dass die auf das Teilchen wirkende Reibungskraft F_R proportional zum Quadrat der Teilchengeschwindigkeit ist, d. h.

$$F_R(v) \ = \ -\beta v^2$$

In dieser Aufgabe soll die Bewegung eines Teilchens diskutiert werden, das zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 die Geschwindigkeit v_0 hat und nur dieser Reibungskraft unterliegt. Die Bewegung sei eindimensional.

(a) Stellen Sie mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetzes eine Differentialgleichung für die

Geschwindigkeit des Teilchens auf. Berechnen Sie aus dieser Differentialgleichung die Geschwindigkeit $v(t)$ des Teilchens als Funktion der Zeit.

$$\text{Ergebnis:} \qquad v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{S_0}} \qquad\qquad S_0 = \frac{m}{\beta}$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) den Ort $x(t)$ des Teilchens als Funktion der Zeit.

(c) Wie groß ist der zurückgelegte Weg für $t \to \infty$? Nach welchen Zeiten hat das Teilchen die Strecken S_0 und $10\ S_0$ zurückgelegt?

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten (2+2+2+2+2 Punkte)

Allgemeine dreidimensionale Bewegungen können in Kugelkoordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

wobei r, θ und φ zeitabhängig sind. Hierzu ist es hilfreich, die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu definieren.

(a) Zeigen Sie, dass die so definierten Vektoren tatsächlich Einheitsvektoren sind und senkrecht aufeinander stehen.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

(c) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten die Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

(e) Geben Sie einen Ausdruck für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten an.