Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2010/2011 Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 08.11.2010, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (3+3+4 Punkte)

Betrachten Sie die x-abhängigen Vektoren

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ \sqrt{x} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$$

(b) die Spatprodukte

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \qquad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

(c) die Integrale

$$\int dx\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad \int dx\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \qquad \int dx\, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Aufgabe 2: Polarkoordinaten (5+5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden ebenen Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ die Polarkoordinaten $r(t)$ sowie $\varphi(t)$ an. Drücken Sie außerdem die Geschwindigkeit und die Beschleunigung mit Hilfe der Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ aus.

(a)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ at^2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(\alpha t^2) \\ a\cos(\alpha t^2) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Pendel und mehr (3+3+4 Punkte)

(a) Drücken Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ des Pendels mit Hilfe des Auslenkwinkels φ und seiner Zeitableitungen aus.

(b) Ebenso für die potentielle Energie $V = mgh$ des Pendels, wobei h die Höhe der Pendelmasse relativ zur Ruhelage bezeichnet.

(c) Wie (a), nur für eine allgemeine ebene Bewegung mit Hilfe der Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$.

Aufgabe 4: Ellipsen (7+3 Punkte)

Eines unserer Ziele in diesem Semester wird die Berechnung der Planetenbahnen aus den Newtonschen Gesetzen sein, die nach den bekannten Keplerschen Gesetzen Ellipsen beschreiben. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei Brennpunkten (im Abstand $2e$ entlang der x-Achse) konstant ist, $r_1 + r_2 = 2a$.

(a) Zeigen Sie, dass Ellipsen in kartesischen Koordinaten (mit dem Koordinatenursprung in der *Mitte* der Ellipse) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Drücken Sie b durch a und e aus.

(b) Zeigen Sie, dass Ellipsen in Polarkoordinaten (mit dem Koordinatenursprung jetzt im rechten Brennpunkt!) die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

erfüllen, wobei $p = a(1 - \epsilon^2)$ (a ist die grosse Halbachse; ϵ die Exzentrizität).

Hinweis: Wenn wir die kartesischen Achsen des Koordinatensystems mit Ursprung im rechten Brennpunkt mit x', y' bezeichen (so dass $x' = x - e$ und $y' = y$), dann sind die Polarkoordinaten definiert durch $x' = r \cos \varphi$ und $y' = r \sin \varphi$.