Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2010/2011 Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 10.01.2011, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (6+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ I_2 &= \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

wobei der Weg $\mathcal{C}$ ein Quadrat der Seitenlänge ℓ in der xy-Ebene mit dem Koordinatenursprung im Mittelpunkt sei. Das Quadrat werde entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen $f_1(\mathbf{r}) = x^4 + y^4 + z^4$, $f_2(\mathbf{r}) = e^{-x-y-z}$, $f_3(\mathbf{r}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$ und $f_4(\mathbf{r}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$.

Aufgabe 2: Konservative Kraftfelder (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden konservative Kraftfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ darüber definiert, dass die Wegintegrale $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ zwischen beliebigen, aber festen Anfangs- und Endpunkten unabhängig vom Integrationsweg sind. Weiterhin wurde behauptet, dass diese Aussage äquivalent ist dazu, dass das Wegintegral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ für alle geschlossenen Integrationswege verschwindet. Beweisen Sie die Äquivalenz.

Aufgabe 3: Reduzierte Masse (10 Punkte)

Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für Planet *und* Sonne auf. Schreiben Sie diese in die neuen Koordinaten $\mathbf{R} = (m\mathbf{r}_E + M\mathbf{r}_S)/(m + M)$ (Schwerpunkt) und $\rho = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S$ (Relativkoordinate) um. Warum reduziert diese Transformation das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem? Welche Rolle spielt die sogenannte reduzierte Masse $\mu = mM/(m + M)$ in den resultierenden Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 4: Bewegung in nicht-konservativen Kraftfeldern (10 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung eines Teilchens der Masse m in der xy-Ebene im Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y) = k(y, -x)$ an. Beschreiben Sie die resultierende Bewegung (Skizzen für beide Normalmoden). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bewegung eines isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillators [Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y) = -k(x, y)$].