Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 14.12.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (6+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Wegintegrale

$$I_1 = \oint_\gamma d\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r})$$
$$I_2 = \oint_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

wobei der Weg γ ein Quadrat der Seitenlänge L in der xy-Ebene mit dem Koordinatenursprung im Mittelpunkt sei. Das Quadrat werde entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktionen $f_1(\mathbf{r}) = x^3 + y^3 + z^3$, $f_2(\mathbf{r}) = e^{x+y+z}$, $f_3(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ und $f_4(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$.

Aufgabe 2: Konservative Kraftfelder (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden konservative Kraftfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ darüber definiert, dass die Wegintegrale $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ zwischen beliebigen, aber festen Anfangs- und Endpunkten unabhängig vom Integrationsweg sind. Weiterhin wurde behauptet, dass diese Aussage äquivalent ist dazu, dass das Wegintegral $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ für alle geschlossenen Integrationswege verschwindet. Beweisen Sie die Äquivalenz.

Aufgabe 3: Impuls- und Energieerhaltung (5+5 Punkte)

(a) Ein Keil (Masse M) mit Neigungswinkel α bewegt sich reibungsfrei auf einer horizontalen Oberfläche. Auf dem Keil rutscht ein würfelförmiger Klotz (Masse m) reibungsfrei herunter. Anfangs seien Klotz und Keil in Ruhe. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes (im Inertialsystem), nachdem dieser vertikal um die Höhe h gefallen ist.

(b) Zwei als punktförmig betrachtete und senkrecht übereinander liegende Bälle der Massen m und M fallen aus der Höhe h_0 und werden vom Boden reflektiert. Wie hoch springt der obere (und leichtere) der beiden Bälle mit Masse m nach der Reflektion in Abhängigkeit von h_0, m, M? Alle Stöße seien perfekt elastisch, d.h. nur die kinetische Energie der Bälle geht beim Stoß in die Energieerhaltung ein. Unter welchen Bedingungen kann der obere Ball nach dem Stoss weit über die Anfangshöhe hinausschießen? Wann erreicht er gerade wieder seine Anfangshöhe. Dies ist eine beliebte Demonstration in Wissenschaftsmuseen.

Aufgabe 4: Reduzierte Masse (10 Punkte)

Stellen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für Planet *und* Sonne auf. Schreiben Sie diese in die neuen Koordinaten $\mathbf{R} = (m\mathbf{r}_E + M\mathbf{r}_S)/(m + M)$ (Schwerpunkt) und $\rho = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_S$ (Relativkoordinate) um. Warum reduziert diese Transformation das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem? Welche Rolle spielt die sogenannte reduzierte Masse $\mu = mM/(m + M)$ in den resultierenden Bewegungsgleichungen.