Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 7.12.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Geben Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen für $x \ll 1$ bis zur vierten Ordnung an:

$$f_1(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad ; \quad f_3(x) = (1+x)^{5/2}$$

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

der Funktionen $f(x,y) = xy\cos xy$, $f(x,y) = (x+2y)^3$ und $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

Aufgabe 2: Gradient (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Gradient in Zylinder- und Kugelkoordinaten über

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{1}$$

bzw.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{2}$$

berechnet werden kann.

Aufgabe 3: Wasserrutsche (10 Punkte)

In einem Schwimmbad rutscht jemand reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale hat den Radius R und fünf volle Windungen auf einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem. (Hinweis: Benutzen Sie Energieerhaltung.)

Aufgabe 4: Elliptische Integrale – Fortsetzung (10 Punkte)

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte X, für deren Abstände von den zwei Brennpunkten A und B

$$\overline{XA} + \overline{XB} = \text{konst.}$$

gilt. Analog ist die Lemniskate durch

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = a^2$$

definiert. Zeigen Sie zunächst, dass die Lemniskate in kartesischen Koordinaten durch

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

sowie in Polarkoordinaten durch

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

beschrieben wird, wenn die Brennpunkte bei $(\pm a, 0)$ liegen. Skizzieren Sie die Lemniskate. Zeigen Sie, dass sich ihr Umfang durch das vollständige elliptische Integral zweiter Art

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

mit $K^2 = 1/2$ dargestellt werden kann.