Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 16.11.2009, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+2+3 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Reihen um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung an (d.h. inklusive des Terms $\sim (x - x_0)^4$):

$$(1-x^2)e^{-x^2} \quad ; \quad \ln(1+x^2) \quad ; \quad \frac{1}{1+\sin x} \quad ; \quad e^{-1/x^2} \quad ; \quad x \coth x$$

(b) Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen an

$$z = 2 + 2i \quad ; \quad z = 3i \quad ; \quad z = -4 \quad ; \quad z = \frac{(2+3i)(2-3i)}{1+i}$$

(c) Wir haben die komplexen Zahlen eingeführt, um Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen zu können. Im Reellen ist es ebenso unmöglich, den Logarithmus einer negativen Zahl zu definieren. Im Komplexen gelingt auch dies. Zeigen Sie, dass für eine positive reelle Zahl $x > 0$ gilt

$$\ln(-x) = \ln x + i\pi.$$

(Sie sollten nach Beantwortung dieser Frage verstanden haben, wie man ganz allgemein den Logarithmus $\ln z$ einer komplexen Zahl z berechnet. Es lohnt sich, darüber nachzudenken, wie ein- bzw. vieldeutig der Logarithmus einer komplexen Zahl ist.)

Aufgabe 2: Chemische Reaktion (10 Punkte)

Die Rate, mit der die chemische Reaktion A + A + A $\rightarrow$ A_3 abläuft, ist proportional zur dritten Potenz der Dichte n der ungebundenen A-Atome. Denn um zu reagieren, müssen drei Atome stoßen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies an einem Ort $\mathbf{r}$ passiert, ist mit der Näherung, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten verschiedener Atome statistisch unabhängig sind, gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, dass sich die drei Atome am Ort $\mathbf{r}$ aufhalten. Die Dichte n der ungebundenen A-Atome erfüllt daher die Differentialgleichung

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n^3$$

Berechnen Sie $n(t)$, wenn $n(t = 0) = n_0$ ist.

*

Aufgabe 3: Weitsprung ohne und Wurf mit Reibung (4+4+2 Punkte)

(a) Ein punktförmiger und reibungsloser Weitspringer springt mit der Geschwindigkeit v_0 ab. Geben Sie den optimalen Absprungwinkel an, unter dem der Weitspringer die größte Weite springt. Berechnen Sie diese Weite mit der Absprunggeschwindigkeit 10m/s (nahe der Geschwindigkeit der besten 100m Sprinter) und vergleichen Sie mit dem Weitsprung-weltrekord.

(b) In der Vorlesung hatten wir für den Wurf mit Reibung (Differentialgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = -\lambda\dot{\mathbf{r}} - mg\hat{\mathbf{z}}$) bereits die Ergebnisse

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \tau_0 v_x(0)[1 - e^{-t/\tau_0}] \\ v_z(t) &= -g\tau_0 + [v_z(0) + g\tau_0]e^{-t/\tau_0} \end{aligned}$$

erhalten. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse auch noch $z = z(t)$ (mit Anfangswert $z(0)$ zur Zeit $t = 0$.

(c) Geben Sie Näherungsformeln für $z(t)$ für $t \ll \tau_0$ (bis zur Ordnung t^2) und für $t \gg \tau_0$ an.

Aufgabe 4: Käfer (10 Punkte)

Zwischen einer Person und der Wand ist ein perfekt elastisches Band der Anfangslänge $1\,m$ gespannt. Am Wandende sitzt auf dem Band ein Käfer. Person und Käfer beginnen zur gleichen Zeit von der Wand wegzulaufen; die Person mit einer Geschwindigkeit von 1m/s *, der Käfer mit 1cm/s auf dem Band. Wird die Person von dem Käfer gebissen? Wenn ja, wann?

* (wobei sich das Band entsprechend ausdehnt)