Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 02.11.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (3+3+4 Punkte)

Betrachten Sie die x-abhängigen Vektoren

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ \sqrt{x} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$$

(b) die Spatprodukte

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \qquad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

(c) die Integrale

$$\int dx\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad \int dx\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \qquad \int dx\, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Aufgabe 2: Polarkoordinaten (5+5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden ebenen Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ die Polarkoordinaten $r(t)$ sowie $\varphi(t)$ an. Drücken Sie außerdem die Geschwindigkeit und die Beschleunigung mit Hilfe der Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_r$ und $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ aus.

(a)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ at^2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(\alpha t^2) \\ a\cos(\alpha t^2) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Pendel und mehr (3+3+4 Punkte)

(a) Drücken Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ des Pendels mit Hilfe des Auslenkwinkels φ und seiner Zeitableitungen aus.

(b) Ebenso für die potentielle Energie $V = mgh$ des Pendels, wobei h die Höhe der Pendelmasse relativ zur Ruhelage bezeichnet.

(c) Wie (a), nur für eine allgemeine ebene Bewegung mit Hilfe der Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$.

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten (2+2+2+2+2 Punkte)

Allgemeine dreidimensionale Bewegungen können in Kugelkoordinaten beschrieben werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

wobei r, θ und φ zeitabhängig sind. Hierzu ist es hilfreich, die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu definieren.

(a) Zeigen Sie, dass die so definierten Vektoren tatsächlich Einheitsvektoren sind und senkrecht aufeinander stehen.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

(c) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten die Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

(e) Geben Sie einen Ausdruck für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten an.