Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 26.10.2008, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen(6+4 Punkte)

Sofern bearbeitet, müssen diese Fingerübungen in den Übungsgruppen auf Aufforderung ohne Notizen vorgerechnet werden können!

(a) Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i$$
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}e^{x}$$

Hier ist δ_{ij} das in der Vorlesung eingeführte Kronecker-Symbol.
(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\int \frac{dz}{z^2 - x^2}$$
$$\int ds \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

Aufgabe 2: Kreuzprodukte (5+5 Punkte)

Beweisen Sie die Produktregel für die Ableitung von Kreuzprodukten

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

(a) ohne Benutzung der Koordinatendarstellungen von **a** und **b**

(b) mit Hilfe der Koordinatendarstellungen

Aufgabe 3: Bahnkurven (5+5 Punkte)

Skizzieren die folgenden Bahnkurven und berechnen Sie sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung.

(a)

$$\mathbf{r}(t) = e^{\gamma t}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie separate Skizzen an für die Fälle $\gamma > 0$ und $\gamma < 0$ sowie $|\gamma| \ll \omega$ und $|\gamma| \gg \omega$.

(b)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ b\omega t/2\pi \end{pmatrix}$$

Geben Sie die anschauliche Bedeutung von R, b und ω an.

Aufgabe 4: Jacobi-Identität (6+4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

Bemerkung: Sie werden im Laufe des Physikstudiums weitere Jacobi-Identitäten kennenlernen, nämlich für die Poisson-Klammer in der Hamiltonschen Mechanik und für den Kommutator in der Quantenmechanik.

(b) Der total antisymmetrische ϵ-Tensor wird über

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ zyklisch} \\ -1 & (ijk) \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, wobei die Indizes i, j und k die Werte $1, 2, 3$ annehmen können. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

gilt. Benutzen Sie diese Relation, um die Formel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

herzuleiten.

Bemerkung: Sie müssen zur Bearbeitung dieser Aufgabe nicht wissen, was ein Tensor ist! Also bitte nicht bereits wegen der Terminologie aufgeben.