

Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 13

Abgabetermin: Montag, 8.2.2009, *Anfang* der Vorlesung

Aufgabe 1: Trägheitstensor (3+3+4 Punkte)

Berechnen Sie den Trägheitstensor bzgl. der Mittelpunkte für:

- (a) eine homogene Kugel mit Radius R
- (b) einen homogenen Würfel der Kantenlänge L
- (c) einen homogenen Zylinder mit Radius R und Höhe h .

Aufgabe 2: Tensoren (3+3+4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie (in beliebigen Dimensionen), dass der Einheitstensor (d.h. die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$) in allen Koordinatensystemen die gleiche Form annimmt.
- (b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass der total antisymmetrische Tensor in zwei Dimensionen

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in allen Koordinatensystemen dieselbe Form annimmt. Stellen Sie die Verbindung zwischen diesem Ergebnis und der Tatsache her, dass die Fläche $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = \sum_{ij} \epsilon_{ij} a_i b_j$ des durch zwei in der xy -Ebene liegende Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms invariant unter Drehungen des Koordinatensystems ist.

- (c) Zeigen Sie analog, dass aus der Invarianz des Spatproduktes dreier Vektoren (d.h. des Volumens des aufgespannten Parallelepipeds) unter Drehungen folgt, dass der total antisymmetrische Tensor (3. Stufe)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) \text{ zyklisch} \\ -1 & (ijk) \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in drei Dimensionen in allen Koordinatensystemen die gleiche Form annimmt. (Der total antisymmetrische Tensor ist, wie wir bereits gesehen haben, häufig hilfreich, um Rechnungen mit Kreuzprodukten zu vereinfachen.)

Aufgabe 3: Längenkontraktion (10 Punkte)

Ein Stab sei im Inertialsystem S in Ruhe und schließe mit der x -Achse einen Winkel θ ein. Welche Länge hat der Stab für einen Beobachter im Inertialsystem S' , das sich relativ zu S mit Geschwindigkeit v in die x -Richtung bewegt.

Aufgabe 4: Mesonen (4+3+3 Punkte)

π^+ -Mesonen haben in ihrem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer von $2,5 \times 10^{-8}$ s.

- (a) Berechnen Sie die Lebensdauer der Mesonen im Laborsystem, relativ zu dem sich die Mesonen mit $v = 0.8c$ bewegen.
- (b) Welche Entfernung legen die Mesonen während einer mittleren Lebensdauer zurück?
- (c) Welche Entfernung hätten Sie ohne relativistische Effekte zurückgelegt?

Zusatzaufgabe: Galaktische Geschwindigkeiten (keine Punkte)

Zwei Galaxien bewegen sich relativ zur Erde mit $0,3c$ in entgegengesetzte Richtungen.

- (a) Mit welcher Relativgeschwindigkeit bewegen sich die beiden Galaxien für einen Beobachter in einer der Galaxien?
- (b) Wie (a) für den Fall, dass sich die Galaxien relativ zur Erde in orthogonale Richtungen bewegen.

Zusatzaufgabe: Teilchen im Magnetfeld (keine Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m und Ladung q im homogenen Magnetfeld in der relativistischen Mechanik. Auf das Teilchen wirkt demnach die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Wie wir in der Vorlesung sehen werden, gilt in der relativistischen Mechanik die Newtonsche Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ weiter, wobei allerdings der Impuls die Form $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ als Funktion der Geschwindigkeit annimmt. Lösen Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen und vergleichen Sie ihr Resultat mit der nicht-relativistischen Lösung.