

Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 18.1.2010, *Anfang* der Vorlesung, d.h. spätestens 12:15

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Benutzen Sie die in der Vorlesung angegebene Regel mit Hilfe eines Spatproduktes, um das Volumenelement in Kugelkoordinaten abzuleiten.

(b) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int dx dy \exp\{-\alpha(x^2 + y^2)\},$$

wobei der Integrationsbereich der gesamte \mathbf{R}^2 sei. Benutzen Sie Ihr Resultat, um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\{-\alpha x^2\}$$

zu berechnen.

Aufgabe 2: Trägheitsmomente (4+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Würfels um eine zu den Kanten parallele Achse durch den Mittelpunkt.

(b) Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Halbachsen sind $a = b = 6378\text{km}$ (am Äquator) und $c = 6357\text{km}$ (Polachse). Hier wollen wir die Trägheitsmomente der Erde um ihre Symmetrieachsen (Hauptachsen) bestimmen.

(i) Berechnen Sie (analog zu 1(a)) das Volumenelement in Ellipsoidkoordinaten r, θ, ϕ

$$\begin{aligned}x &= ar \sin \theta \cos \phi \\y &= br \sin \theta \sin \phi \\z &= cr \cos \theta\end{aligned}$$

mit $0 < r < 1$, $0 < \phi < 2\pi$ und $0 < \theta < \pi$.

(ii) Bestimmen Sie die Trägheitsmomente eines homogenen Rotationsellipsoids entlang der drei Hauptachsen durch den Schwerpunkt.

Aufgabe 3: Reversionspendel (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein physikalisches Pendel zwei Drehachsen mit den Abständen ℓ_1 und ℓ_2 vom Schwerpunkt existieren, für die die zugehörigen Frequenzen kleiner Schwingungen gleich sind, und dass diese Längen durch $\ell_1 \ell_2 = J/M$ verknüpft sind (J ist das Trägheitsmoment bzgl. des Schwerpunktes). Zeigen Sie auch, dass die zugehörige Frequenz ω die Berechnung der Erdbeschleunigung g aus $g = \omega^2(\ell_1 + \ell_2)$ erlaubt. (Die Unterstützungspunkte liegen auf gerader Linie durch den Schwerpunkt; $\ell_1 + \ell_2$ ist daher einfach der Abstand der Achsen. Eine Bestimmung des Schwerpunktes ist nicht erforderlich.)

Aufgabe 4: Tennis (10 Punkte)

Wenn Sie schon einmal Tennis gespielt haben, so wissen Sie, dass Ihr Kraftaufwand beim Schlagen des Balles stark davon abhängt, an welcher Stelle der Ball den Schläger trifft. In dieser Aufgabe soll der Tennisschläger durch einen homogenen Stab der Länge L repräsentiert werden. Dieser Stab werde im Abstand x kurz von einem (sagen wir dem linken) Ende des Stabes von einem Ball getroffen. In welchem Abstand x muss dies geschehen, damit das linke Ende des Stabes anfangs in Ruhe bleibt. (Wenn Sie den Stab in der Hand hielten, müssten Sie in diesem Fall nur die auf den Stab wirkende Schwerkraft ausgleichen, aber keinen Rückstoß aufgrund des Ballkontaktes auffangen.)