Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 4.1.2010, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (6+2+2 Punkte)

(a) In der Vorlesung haben wir ausgenutzt (3. Keplersches Gesetz), dass die Fläche einer Ellipse gegeben ist durch $F = \pi ab$. Beweisen Sie diese Aussage.

(b) Betrachten Sie eine Kurve (Dreieck) auf der (kugelförmigen) Erdoberfläche, die vom Nordpol entlang eines Längengrads zum Äquator führt, dann ein Viertel des Erdumfangs entlang des Äquators zurücklegt und schließlich wieder entlang eines Längengrads zum Nordpol zurückkehrt. Geben Sie den eingeschlossenen Raumwinkel an. (Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Winkelsumme des Dreiecks.)

(c) Betrachten Sie den 42. Breitengrad auf der Nordhalbkugel. Welchem Raumwinkel entspricht die eingeschlossene Fläche, die den Südpol enthält?

Aufgabe 2: Wirkungsquerschnitt für die Rutherfordstreuung (10 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass Stoßparameter und Streuwinkel bei der Rutherfordstreuung über

$$b = \frac{GM}{v_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

zusammenhängen. Berechnen Sie hieraus den Wirkungsquerschnitt für die Rutherfordstreuung. (Sie dürfen hier mit den Konstanten des Keplerproblems weiterrechnen, können aber auch die gesamte Rechnung noch einmal durchgehen, um die tatsächlichen Konstanten des Rutherfordproblems zu erhalten.)

Aufgabe 3: Streuung an harter Kugel (4+3+3 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung von (punktförmigen) Teilchen an einer harten Kugel mit Radius R.

(a) Zeigen Sie, dass zwischen Stoßparameter b und Streuwinkel θ die Beziehung

$$b = R \cos(\theta/2)$$

besteht.

(b) Berechnen Sie den zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt.

(c) Berechnen Sie den sogenannten totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$.

Aufgabe 4: Kepler-Problem und Energieerhaltung (2 + 3 + 2 + 3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung die Radialgleichung

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

mit Hilfe eines kleinen Tricks gelöst. Andererseits entspricht diese effektiv der Bewegungsgleichung eines eindimensionalen Problems mit der einzigen Koordinate r, wobei die rechte Seite der Gleichung proportional zu einer effektiven Kraft ist. Wir können dieses Problem also auch mit Hilfe des allgemeinen Lösungswegs für eindimensionale konservative Probleme lösen.

(a) Finden Sie einen Ausdruck für die zur effektiven Kraft gehörende potentielle Energie $V_{\text{eff}}(r)$.

(b) Finden Sie mit Hilfe der Energieerhaltung eine implizite Lösung für die Funktion $r = r(t)$. (Sie brauchen hier das auftretende Integral nicht zu lösen.)

(c) Schreiben Sie mit Hilfe der Drehimpulserhaltung die implizite Lösung für $r = r(t)$ in eine implizite Lösung für die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ um.

(d) Berechnen Sie (*nicht* äquivalent zu: Nachschlagen) das in der impliziten Lösung für die Bahnkurve auftretende Integral und zeigen Sie auf diese Weise, dass die gesuchte Bahnkurve eine Ellipse ist.