Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2009/2010 Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 19.10.2009, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 12:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (4+6 Punkte)

(a) Differenzieren Sie

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x^2) - \sin^3 x \\ f(x) &= x^4 \cdot \sin x \\ f(x) &= x \cdot |x^3| \\ f(x) &= \sqrt[5]{x} \end{aligned} \tag{1}$$

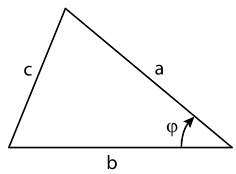
(b) Berechnen Sie die folgenden (unbestimmten) Integrale:

$$\int dx\, e^x \sin x\,; \qquad \int \frac{dx}{\cosh x}\,; \qquad \int dx\, \frac{x+3}{x^2-9} \tag{2}$$

Aufgabe 2: Vektoren (5 + 5 Punkte)

(a) Für ein beliebiges Dreieck mit Seitenlängen a, b und c sowie dem c gegenüberliegenden Winkel φ (s. Abb.) gilt der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi.$$



Beweisen Sie dies mit Hilfe der Vektorrechnung (Skalarprodukt!).

(b) Berechnen Sie für die Vektorenpaare $\mathbf{a} = (2, 2, 2)$ und $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$ sowie $\mathbf{a} = (1, 4, 0)$ und $\mathbf{b} = (4, -1, 0)$ folgende Größen:

- den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.
- den auf Länge eins normierten Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ auf die von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannte Ebene. (Wählen Sie die Vorzeichen derart, dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\hat{\mathbf{n}}$ ein Rechtssystem bilden.)

Aufgabe 3: Doppelte Kreuzprodukte (5+5 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden, häufig benutzten Identitäten für doppelte Kreuzprodukte:

(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (engl.: "*back cab*" Regel)

Aufgabe 4: Ellipsen (7+3 Punkte)

Eines unserer Ziele in diesem Semester wird die Berechnung der Planetenbahnen aus den Newtonschen Gesetzen sein, die nach den bekannten Keplerschen Gesetzen Ellipsen beschreiben. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei Brennpunkten (im Abstand $2e$ entlang der x-Achse) konstant ist, $r_1 + r_2 = 2a$.

(a) Zeigen Sie, dass Ellipsen in kartesischen Koordinaten (mit dem Koordinatenursprung in der *Mitte* der Ellipse) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Drücken Sie b durch a und e aus.

(b) Zeigen Sie, dass Ellipsen in Polarkoordinaten (mit dem Koordinatenursprung jetzt im rechten Brennpunkt!) die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

erfüllen, wobei $p = a(1 - \epsilon^2)$ (a ist die grosse Halbachse; ϵ die Exzentrizität).

Hinweis: Wenn wir die kartesischen Achsen des Koordinatensystems mit Ursprung im rechten Brennpunkt mit x', y' bezeichen (so dass $x' = x - e$ und $y' = y$), dann sind die Polarkoordinaten definiert durch $x' = r \cos \varphi$ und $y' = r \sin \varphi$.