Heiko Dumlich, Max Hoffmann 16. Juli 2007

11 Übungsblatt Theoretische Physik V - Klausurblatt

11.1 (Greensche Funktion und Suprafluidität)

Die Matrix von Aufgabe 16 lautet:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} i\partial_t - \mu + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} & -\mu \\ \mu & i\partial_t + \mu - \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \end{pmatrix}$$

Wir bilden die Fourier Transformierte:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt'}{2\pi}\, i\partial_t e^{-i\omega t'} &= \omega \int \frac{dt'}{2\pi} \delta\left(t - t'\right) e^{-i\omega t'} \\ &= \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \vec{\nabla}^2 e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} &= -\mathbf{p}^2 \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &= -\mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

Und damit folgt:

$$M = \begin{pmatrix} \omega - \mu - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} & -\mu \\ \mu & \omega + \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \end{pmatrix}.$$

Für 2×2 Matrizen, kann man die Inverse leicht nach der CRAMERschen Regel bilden:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die Determinante lautet:

$$\begin{aligned} &\left(\omega - \mu - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)\left(\omega + \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) + \mu^2 \\ = \;& \omega^2 + \cancel{\omega\mu} + \cancel{\omega\frac{\mathbf{p}^2}{2m}} - \cancel{\mu\omega} - \cancel{\mu^2} - \mu\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \cancel{\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\omega} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\mu - \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 + \cancel{\mu^2} \\ = \;& \omega^2 - \underbrace{\left(\mu\frac{\mathbf{p}^2}{m} + \frac{\mathbf{p}^4}{4m^2}\right)}_{=E^2} \\ = \;& \omega^2 - E^2 \end{aligned}$$

und damit folgt[1]

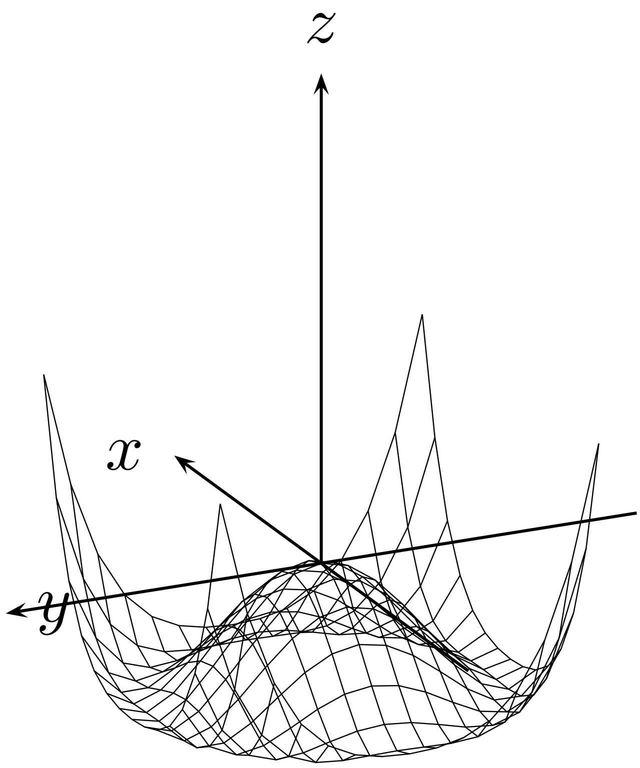
$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{\omega^2 - E^2} \begin{pmatrix} \omega + \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} & \mu \\ -\mu & \omega - \mu - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \end{pmatrix}$$

[1] E wurde in Aufgabe 16 d bestimmt.

Betrachtet man nur Polstellen der Greenschen Funktion, so erhält man wieder

$$E = k\sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + \frac{\mu}{m}} = \frac{1}{2m}\sqrt{4\mu k^2 + k^4}.$$

Die Nebendiagonalelemente μ stellen eine Art Stromdichte dar. Die Diagonalelemente sind nicht invariant unter einem Phasenfaktor $\exp(-i\theta)$ und verursachen daher eine Symmetriebrechung.



11.2 (Kondensat-Entleerung „depletion of the condensate" in verdünnten Bose-Einstein-Kondensaten)

a)

Es ist zu zeigen:

$$n = n_0 + \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle$$

Mit $n = \langle |\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle$ der Teilchendichte, $n_0 = |\psi_0|^2$ der Kondensatdichte und $\psi(\vec{x},t) = \psi_0 + \delta\psi(\vec{x},t)$ folgt:

$$\begin{aligned}
n &= \langle |\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle \\
&= \langle (\psi_0 + \delta\psi(\vec{x},t))(\psi_0^* + \delta\psi^*(\vec{x},t)) \rangle \\
&= \langle \psi_0\psi_0^* + \psi_0\delta\psi^*(\vec{x},t) + \delta\psi(\vec{x},t)\psi_0^* + \delta\psi(\vec{x},t)\delta\psi^*(\vec{x},t) \rangle \\
&= \langle |\psi_0|^2 \rangle + \langle \psi_0\delta\psi^*(\vec{x},t) \rangle + \langle \delta\psi(\vec{x},t)\psi_0^* \rangle + \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle \\
&= n_0 + \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle + \psi_0 \underbrace{\langle \delta\psi^*(\vec{x},t) \rangle}_{=0} + \psi_0^* \underbrace{\langle \delta\psi(\vec{x},t) \rangle}_{=0}
\end{aligned}$$

Die Terme verschwinden, da wir eine Integration über ein symmetrisches Intervall durchführen und der Integrand ungerade ist.

Somit ergibt sich insgesamt also:

$$n = n_0 + \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle$$

$\square$

b)

Es ist mit Hilfe der Greenschen Funktion, welche in Aufgabe 17 abgeleitet wurde zu zeigen, dass

$$\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{\frac{\vec{p}^2}{2m} + n_0 g}{2E(\vec{p})} - \frac{1}{2} \right]$$

Es gilt (für $\vec{x} = \vec{x}'$ und $t' = t + \varepsilon$, mit $\varepsilon \to 0$):

$$\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2 \rangle = \langle \delta\psi(\vec{x},t)\,\delta\psi^*(\vec{x},t) \rangle = \langle T\left[\delta\psi(\vec{x},t)\,\delta\psi^*\left(\vec{x}',t'\right)\right] \rangle = iG(\vec{x},t)$$

Aus Aufgabe 14 d) und e) können wir $\langle T[\delta\psi\delta\psi^*] \rangle = iG(\vec{x},t)$ nutzen, wobei $G(\vec{x},t)$ die Fouriertransformierte der Greenschen Funktion aus Aufgabe 17 ist und mit $\mu = n_0 g$ ist das gesuchte Matrixelement gegeben mit:

$$G(\omega,\vec{p}) = \frac{\omega - \left(\frac{p^2}{2m} + n_0 g\right)}{\omega^2 - E^2}$$

Es folgt also mit Fourier Transformation:

$$G\left(\vec{x} - \vec{x}', t - t'\right) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega - \left(\frac{p^2}{2m} + n_0 g\right)}{\omega^2 - E^2} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} e^{-i\omega(t-t')}$$

mit $\vec{x}-\vec{x}'=0$ und $t'=t+\varepsilon \Leftrightarrow t-t'=\varepsilon \to 0$ können wir weiter umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
G\left(\vec{x}-\vec{x}',t-t'\right) &= \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega-\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)}{\omega^2-E^2}e^{-i\omega\varepsilon} \\
&= \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega e^{-i\omega\varepsilon}}{\omega^2-E^2}-\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)}{\omega^2-E^2}e^{-i\omega\varepsilon}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Konturintegration können wir die ω-Integration ausführen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega e^{-i\omega\varepsilon}}{\omega^2-(E+i\eta)^2} &= \frac{1}{2\,(E+i\eta)}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega e^{-i\omega\varepsilon}}{(\omega-(E+i\eta))\,(\omega+(E+i\eta))} \\
&= \frac{1}{2\,(E+i\eta)}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\omega e^{-i\varepsilon\omega}\left(\frac{1}{\omega-(E+i\eta)}-\frac{1}{\omega+(E+i\eta)}\right) \\
&= \frac{1}{2\,(E+i\eta)}\left(\frac{1}{2\pi}2\pi i\cdot res\left(\frac{\omega e^{-i\varepsilon\omega}}{\omega-(E+i\eta)};E+i\eta\right)\right. \\
&- \left.\frac{1}{2\pi}2\pi i\cdot res\left(\frac{\omega e^{-i\varepsilon\omega}}{\omega+(E+i\eta)};-(E+i\eta)\right)\right) \\
&= \frac{i}{2\,(E+i\eta)}\left((E+i\eta)\,e^{-i(E+i\eta)\varepsilon}+(E+i\eta)\,e^{i(E+i\eta)\varepsilon}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(e^{-i(E+i\eta)\varepsilon}+e^{i(E+i\eta)\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

mit $res\left(\frac{\omega e^{-i\varepsilon\omega}}{\omega-(E+i\eta)};E+i\eta\right)=\frac{(E+i\eta)e^{-i(E+i\eta)\varepsilon}}{1}$. Da sowohl ε, als auch η gegen 0 streben, erhalten wir:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\omega e^{-i\omega\varepsilon}}{\omega^2-E^2}=\frac{i}{2}$$

Die zweite ω-Integration liefert fast äquivalent:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)}{\omega^2-(E+i\eta)^2}e^{-i\omega\varepsilon} &= \frac{1}{2\,(E+i\eta)}\int \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)e^{-i\omega\varepsilon}}{(\omega-(E+i\eta))\,(\omega+(E+i\eta))} \\
&= \frac{\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)}{2\,(E+i\eta)}\frac{1}{2\pi}2\pi i\cdot res\left(\frac{e^{-i\varepsilon\omega}}{\omega-(E+i\eta)};E+i\eta\right) \\
&= i\left(\frac{\left(\frac{p^2}{2m}+n_0g\right)e^{-i(E+i\eta)\varepsilon}}{2\,(E+i\eta)}\right)
\end{aligned}$$

Dies liefert also wieder mit $\varepsilon,\eta\to 0$:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\left(\frac{p^2}{2m} + n_0 g\right)}{\omega^2 - E^2} e^{-i\omega\varepsilon} = i \frac{\frac{p^2}{2m} + n_0 g}{2E}$$

Fügen wir dies in $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$ ein, so erhalten wir:

$$G\left(\vec{x} - \vec{x}', t - t'\right) = i \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{p^2}{2m} + n_0 g}{2E}\right)$$

Nun nutzen wir:

$$\langle |\delta\psi(\vec{x}, t)|^2 \rangle = iG(\vec{x}, t)$$

und setzen $G(\vec{x}, t)$ ein:

$$\langle |\delta\psi(\vec{x}, t)|^2 \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\frac{p^2}{2m} + n_0 g}{2E(\vec{p})} - \frac{1}{2}\right)$$

□

c)

Wir betrachten die Γ-Funktion, wobei zu zeigen ist, dass

$$\frac{1}{\lambda^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty d\tau\, \tau^{z-1} e^{-\lambda\tau}$$

Wir können umstellen zu:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty d\tau\, \lambda^z\, \tau^{z-1} e^{-\lambda\tau}$$

eine triviale Substitution $t = \lambda\tau$ liefert uns:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{\lambda} \lambda^z \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{z-1} e^{-t}$$

(wir verwenden hierbei $\tau = \frac{t}{\lambda}$, $\frac{dt}{\lambda} = d\tau$) nach kürzen von λ^z erhalten wir die Gammafunktion:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}$$

□

d)

Es ist das Integral:

$$\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle = \int \frac{d^dp}{\left(2\pi\right)^d}\left[\frac{\frac{\vec{p}^2}{2m}+n_0g}{2E\left(\vec{p}\right)}-\frac{1}{2}\right]$$

explizit zu lösen. Das gesuchte Ergebnis ist mit:

$$\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle = \frac{S_d\left(d-2\right)}{16\pi^{d+\frac{1}{2}}}\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\left(mn_0g\right)^{\frac{d}{2}}$$

gegeben.

Es gilt $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ für die Fläche der Einheitskugel. Wir können umschreiben, wobei wir die $-\frac{1}{2}$ vernachlässigen (dimensional Regularisierung):

$$\begin{aligned}\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle &= \int \frac{d^dp}{\left(2\pi\right)^d}\frac{\frac{\vec{p}^2}{2m}+n_0g}{2E\left(\vec{p}\right)} \\ &= \frac{1}{2\left(2\pi\right)^d}\int d^dp\,\frac{\frac{p^2}{2}+mn_0g}{mE}\end{aligned}$$

Mit $E = \frac{p}{2m}\sqrt{p^2+4mn_0g}$ folgt:

$$\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle = \frac{1}{2\left(2\pi\right)^d}\int d^dp\,p^{-1}\frac{p^2+2mn_0g}{\sqrt{p^2+4mn_0g}}$$

Wir können das d-dimensionale Integral umschreiben ($\int d^dp \rightarrow S_d\int dp\,p^{d-1}$):

$$\begin{aligned}\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle &= \frac{S_d}{2\left(2\pi\right)^d}\int_0^\infty dp\,p^{d-2}\frac{p^2+2mn_0g}{\sqrt{p^2+4mn_0g}} \\ &= \frac{S_d}{2\left(2\pi\right)^d}\int_0^\infty dp\,\left(p^d+2mn_0g\,p^{d-2}\right)\frac{1}{\sqrt{p^2+4mn_0g}}\end{aligned}$$

Ausnutzen der in c) gezeigten Relation $\frac{1}{\lambda^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty d\tau\,\tau^{z-1}e^{-\lambda\tau}$ liefert, wobei $z=\frac{1}{2}$ und $\lambda = p^2+4mn_0g$:

$$\left\langle\left|\delta\psi\left(\vec{x},t\right)\right|^2\right\rangle = \frac{S_d}{2\left(2\pi\right)^d\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty dp\int_0^\infty d\tau\,\tau^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(p^2+4mn_0g\right)\tau}\left(p^d+2mn_0g\,p^{d-2}\right)$$

Jetzt substituieren wir $\alpha = p^2\tau \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}$ mit $\frac{d\alpha}{2p\tau} = dp$:

$$
\begin{aligned}
\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle &= \frac{S_d}{4(2\pi)^d\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\tau\,\tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha}{\tau}+4mn_0g\right)\tau}\left(\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} + 2mn_0g\,\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{S_d}{4(2\pi)^d\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{-1}\,e^{-\alpha}\int_0^\infty d\tau\,\tau^{-1}e^{-4mn_0g\tau}\left(\alpha^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{d}{2}} + 2mn_0g\,\alpha^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{d}{2}+1}\right)
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $\tau' = 4mn_0g\tau$ folgt:

$$
\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle = \frac{S_d}{4(2\pi)^d\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{-1}\,e^{-\alpha}\int_0^\infty d\tau'\,\tau^{-1}e^{-\tau'}\left(\alpha^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{d}{2}} + \frac{1}{2}\alpha^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{d}{2}+1}\right)(4mn_0g)^{\frac{d}{2}}
$$

Umschreiben in Gamma-Funktionen mit $\int_0^\infty dx\,x^{-1}e^{-x}x^n = \Gamma(n)$ und $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$
\begin{aligned}
\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle &= \frac{S_d}{4(2\pi)^d\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}+1\right)\right)2^d\,(mn_0g)^{\frac{d}{2}}\\
&= \frac{S_d}{4\pi^{d+\frac{1}{2}}}\left(\Gamma\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}+1\right)\right)(mn_0g)^{\frac{d}{2}}
\end{aligned}
$$

Verwendung der Eigenschaft der Gamma-Funktion $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, liefert:

$$
\begin{aligned}
\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle &= \frac{S_d}{4\pi^{d+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}(d-1)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) + \left(-\frac{d}{2}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\right)(mn_0g)^{\frac{d}{2}}\\
&= \frac{S_d}{4\pi^{d+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}(d-1)-\frac{d}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)(mn_0g)^{\frac{d}{2}}\\
&= \frac{S_d\,(d-2)}{16\pi^{d+\frac{1}{2}}}\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)(mn_0g)^{\frac{d}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Hieraus erhalten wir für $d=3$ die Bogoliubov-Formel, da $\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle$ zu:

$$
\langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle = \frac{S_3}{16\pi^{\frac{7}{2}}}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)\,(mn_0g)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}n\sqrt{\frac{na^3}{\pi}}
$$

mit $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$, $S_3 = 4\pi$, $g = \frac{4\pi a}{m}$ und $n_0 \to n$ für $\delta\psi(\vec{x},t)$ klein (was $n - n_0 \ll n$ bedeutet), wird. Dazu gilt $n = n_0 + \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle \Leftrightarrow n_0 = n - \langle |\delta\psi(\vec{x},t)|^2\rangle$, setzen wir ein erhalten wir die Bogoliubov-Formel für die Kondensat-Entleerung:

$$
n_0 = n\left(1 - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{na^3}{\pi}}\right)
$$

□

11.3 (Exakt lösbarer anharmonischer Oszillator)

a)

Der Hamiltonian lautet:

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 x^2\right)}_{=:H_0} + \underbrace{\frac{U}{8\omega^2}\left(p^2 + \omega^2 x^2 - \omega\right)\left(p^2 + \omega^2 x^2 - 3\omega\right)}_{=:H'},$$

den wir zunächst in ungestörten Anteil und Störteil

$$H' = \frac{U}{8\omega^2}\left(2H_0 - \omega\right)\left(2H_0 - 3\omega\right)$$

aufspalten. Der ungestörte harmonische Oszillator hat die Eigenzustände und Eigenwerte:

$$H_0|n\rangle = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

Wir bemerken, dass H mit H_0 vertauscht, da:

$$\begin{aligned}
[H_0, H] &= \left[H_0, H_0 + H'\right] = \left[H_0, H'\right] \\
&= \frac{U}{8\omega}\left[H_0, \left(2H_0 - \omega\right)\left(2H_0 - 3\omega\right)\right] \\
&= \frac{U}{8\omega}\left\{\left[H_0, 2H_0 - \omega\right]\left(2H_0 - 3\omega\right) + \left(2H_0 - \omega\right)\left[H_0, 2H_0 - 3\omega\right]\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$H_0 H|n\rangle = H H_0|n\rangle = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)H|n\rangle.$$

$H|n\rangle$ ist also Eigenzustand von H_0 mit Eigenwert $\omega\left(n + 1/2\right)$. Damit können wir die Eigenwerte von H berechnen:

$$\begin{aligned}
H|n\rangle &= \left(H_0 + \frac{U}{2\omega^2}\left(H_0 - \frac{\omega}{2}\right)\left(H_0 - \frac{3\omega}{2}\right)\right)|n\rangle \\
&= \left(\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{U}{2\omega^2}\left(\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\omega}{2}\right)\left(\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{3\omega}{2}\right)\right)|n\rangle \\
&= \left(\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{U}{2}n\left(n - 1\right)\right)|n\rangle \\
&= \left[n^2\frac{U}{2} + n\left(\omega - \frac{U}{2}\right) + \frac{\omega}{2}\right]|n\rangle
\end{aligned}$$

b)

Zu berechnen sind die Propagatoren

$$\begin{aligned} G_x(t) &= -i\langle T[x(t)\,x(0)]\rangle \\ G_p(t) &= -i\langle T[p(t)\,p(0)]\rangle\,. \end{aligned}$$

Das chronologische Produkt ist gegeben durch:

$$T[f(t_1)\,f(t_2)] = \Theta(t_1-t_2)\,f(t_1)\,f(t_2) + \Theta(t_2-t_1)\,f(t_2)\,f(t_1)\,.$$

Das bedeutet anschaulich, der Operator, der zeitlich als erstes folgt, wird auch als erstes auf einen gegebenen Ket angewandt. Wir erinnern uns an die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und drücken durch sie x und p aus:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^\dagger + a\right) \\ p &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right). \end{aligned}$$

Die Operatoren

$$x(t) \qquad p(t)$$

müssen ins Heisenberg-Bild transformiert werden:

$$A(t) = e^{iHt}A(0)\,e^{-iHt}.$$

Dazu benutzen wir die Campbell-Baker-Haussdorff-Regel:

$$e^B A e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n \qquad \text{mit } A_0 = A; \quad A_n = [B, A_{n-1}]$$

Zuerst die Kommutatoren von $a, a^\dagger$ mit $H_0 = \omega(N+1/2) = \omega\left(a^\dagger a + 1/2\right)$ und $[a, a^\dagger] = 1$

$$\begin{aligned} [H_0, a] &= \omega[a^\dagger a + \frac{1}{2}, a] \\ &= \omega[a^\dagger, a]a \\ &= -\omega a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H_0, a^\dagger] &= \omega[a^\dagger a + \frac{1}{2}, a^\dagger] \\ &= \omega a^\dagger[a, a^\dagger] \\ &= \omega a^\dagger \end{aligned}$$

Damit folgen schnell die eigentlich gesuchten Kommutatoren:

$$\begin{aligned}
[H,a] &= \left[H_0 + \frac{U}{8\omega^2}\left(2H_0-\omega\right)\left(2H_0-3\omega\right), a\right] \\
&= -\omega a + \frac{U}{8\omega^2}\left(\left(2H_0-\omega\right)\left[2H_0-3\omega,a\right] + \left[\left(2H_0-\omega\right),a\right]\left(2H_0-3\omega\right)\right) \\
&= -\omega a + \frac{U}{8\omega^2}\left(\left(2H_0-\omega\right)\left(-2\omega a\right) + \left(-2\omega a\right)\left(2H_0-3\omega\right)\right) \\
&= -\omega a + \frac{U}{8\omega^2}\left(-4H_0 a\omega + 2\omega^2 a - 4\omega a H_0 + 6\omega^2 a\right) \\
&= -\omega a + \frac{U}{8\omega^2}\left(8\omega^2 a - 8H_0 a\omega - 4\omega^2 a\right) = -\omega a + \frac{U}{8\omega^2}\left(4\omega^2 a - 8H_0 a\omega\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{U}{2} - \omega - \frac{U}{\omega}H_0\right)}_{=:\Omega} a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H,a^\dagger] &= \omega a^\dagger + \frac{U}{8\omega^2}\Big(\left(2H_0-\omega\right)\left[2H_0-3\omega,a^\dagger\right] + \left[2H_0-\omega,a^\dagger\right]\left(2H_0-3\omega\right)\Big) \\
&= \omega a^\dagger + \frac{U}{8\omega^2}\Big(\left(2H_0-\omega\right)2\omega a^\dagger + 2\omega a^\dagger\left(2H_0-3\omega\right)\Big) \\
&= \omega a^\dagger + \frac{U}{8\omega^2}\Big(4H_0 a^\dagger\omega - 2\omega^2 a^\dagger + 4\omega a^\dagger H_0 - 6\omega^2 a^\dagger\Big) \\
&= \omega a^\dagger + \frac{U}{8\omega^2}\Big(8H_0 a^\dagger\omega - 12\omega^2 a^\dagger\Big) \\
&= \underbrace{\left(\omega + \frac{U}{\omega}H_0 - \frac{3}{2}U\right)}_{=:\Omega^\dagger} a^\dagger
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$a\left(t\right) = e^{i\Omega t}a \qquad \text{und} \qquad a^\dagger\left(t\right) = e^{i\Omega^\dagger t}a^\dagger.$$

Damit berechnen wir die Greenschen Funktion als Erwartungswert des chronologischen Produktes im Vakuum ($n=0$).

$$\begin{aligned}
\left\langle T[x\left(t\right)x\left(0\right)]\right\rangle &= \left\langle \Theta\left(t\right)x\left(t\right)x\left(0\right) + \Theta\left(-t\right)x\left(0\right)x\left(t\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\omega}\Big\langle \Theta\left(t\right)e^{iHt}\Big(a^\dagger + a\Big)e^{-iHt}\Big(a^\dagger + a\Big) + \Theta\left(-t\right)\Big(a^\dagger + a\Big)e^{iHt}\Big(a^\dagger + a\Big)e^{-iHt}\Big\rangle \\
&= \frac{1}{2\omega}\Big\langle \Theta\left(t\right)\Big(\cancel{e^{iHt}a^\dagger e^{-iHt}a^\dagger} + \cancel{e^{iHt}a^\dagger e^{-iHt}}a + e^{iHt}ae^{-iHt}a^\dagger + \cancel{e^{iHt}ae^{-iHt}a}\Big) \\
&\qquad + \Theta\left(-t\right)\Big(\cancel{a^\dagger e^{iHt}a^\dagger e^{-iHt}} + \cancel{a^\dagger e^{iHt}ae^{-iHt}} + ae^{iHt}a^\dagger e^{-iHt} + \cancel{ae^{iHt}ae^{-iHt}}\Big)\Big\rangle \\
&= \frac{1}{2\omega}\Big(\left\langle\Theta\left(t\right)e^{i\Omega t}\right\rangle + \Big\langle\Theta\left(-t\right)e^{i\Omega^\dagger t}\Big\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Damit ist

$$G_x\left(t\right) = \frac{-i}{2\omega}\Big(\left\langle\Theta\left(t\right)e^{i\Omega t}\right\rangle + \Big\langle\Theta\left(-t\right)e^{i\Omega^\dagger t}\Big\rangle\Big)$$

Ganz analog folgt:

$$
\begin{aligned}
\langle T[p\,(t)\,p\,(0)]\rangle &= \langle \Theta\,(t)\,p\,(t)\,p\,(0) + \Theta\,(-t)\,p\,(0)\,p\,(t)\rangle \\
&= -\frac{\omega}{2}\left\langle \Theta\,(t)\,e^{iHt}\left(a^{\dagger}-a\right)e^{-iHt}\left(a^{\dagger}-a\right) + \Theta\,(-t)\left(a^{\dagger}-a\right)e^{iHt}\left(a^{\dagger}-a\right)e^{-iHt}\right\rangle \\
&= -\frac{\omega}{2}\Big\langle \Theta\,(t)\left(\cancel{e^{iHt}a^{\dagger}e^{-iHt}a^{\dagger}} - \cancel{e^{iHt}a^{\dagger}e^{-iHt}a} - e^{iHt}ae^{-iHt}a^{\dagger} + \cancel{e^{iHt}ae^{-iHt}a}\right) \\
&\qquad +\Theta\,(-t)\left(\cancel{a^{\dagger}e^{iHt}a^{\dagger}e^{-iHt}} - \cancel{a^{\dagger}e^{iHt}ae^{-iHt}} - ae^{iHt}a^{\dagger}e^{-iHt} + \cancel{ae^{iHt}ae^{-iHt}}\right)\Big\rangle \\
&= \frac{\omega}{2}\left(\left\langle \Theta\,(t)\,e^{i\Omega t}\right\rangle + \left\langle \Theta\,(-t)\,e^{i\Omega^{\dagger}t}\right\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
G_p\,(t) = \frac{-i\omega}{2}\left(\left\langle \Theta\,(t)\,e^{i\Omega t}\right\rangle + \left\langle \Theta\,(-t)\,e^{i\Omega^{\dagger}t}\right\rangle\right).
$$