Max Hoffmann,
Heiko Dumlich

15. Aufgabe

Zeige: $\dfrac{\delta A[\varphi, j]}{\delta \varphi} = 0$

wobei $A[\varphi, j] = \int d^4x \; \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - j\varphi$

p.I. Trick:

$$\int d^4x \; (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) = 0 - \int d^4x \; \varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi$$

womit wir erhalten:

$$A[\varphi, j] = \int d^4x \; -\frac{1}{2}\varphi(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi - j\varphi$$

Das variieren wir:

$$\frac{\delta A[\varphi', j]}{\delta\varphi} = \frac{\delta}{\delta\varphi}\int d^4x' \; -\frac{1}{2}\varphi'(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi' - j'\varphi'$$

$$= \int d^4x' \; -\frac{1}{2}\delta(x-x')(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi' - \frac{1}{2}\varphi'(\partial_\mu\partial^\mu m^2)\delta(x-x') - j'\delta(x-x')$$

Wir betrachten wieder:

$$\int d^4x' \; \varphi'\partial'_\mu\partial'^\mu 1 = 0 - \int d^4x' (\partial'_\mu\varphi')\partial'^\mu 1$$

$$= 0 + \int d^4x' \; \partial'_\mu\partial'^\mu\varphi'$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi = -j$$

Wir nehmen, an dass

$$\varphi = \varphi_0 + \int d^4x \ G(x-x') \, j'$$

mit $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi_0 = 0$ und $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x-x') = -\delta(x-x')$

Damit folgt

$$-j' \overset{!}{=} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int d^4x \ G(x-x') \, j'$$

$$= \int d^4x \ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x-x') \, j' = -j$$

$\square$

b) $\quad Z[j] = \int Dx \ e^{iA[\varphi, j]}$

Zeige: $Z[j] = Z[0] \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x \int d^4x' \ j(x) \, G(x-x') \, j(x') \right]$?

Aufgabe 16) Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\, i\partial_t \psi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla}\overline{\psi} \cdot \vec{\nabla}\psi + \mu|\psi|^2 - \frac{g}{2}|\psi|^4$$

a) $\mathcal{L}$ ist invariant unter $\psi \to \psi' e^{i\Theta}$ mit $\Theta = \text{const.}$

Terme einzeln betrachten

$\underline{\overline{\psi}\, i\partial_t \psi}$:
$$\overline{\psi} = \overline{\psi' e^{i\Theta}} = \overline{\psi'}\, e^{-i\Theta}$$

$$\partial_t \psi = \partial_t \psi' e^{i\Theta} = e^{i\Theta} \partial_t \psi'$$

$$\Rightarrow \overline{\psi}\, i\partial_t \psi = \overline{\psi}' i e^{-i\Theta} e^{i\Theta} \partial_t \psi' = \overline{\psi}' i \psi'$$

$\underline{\vec{\nabla} \cdot \psi^+ \cdot \vec{\nabla}\psi}$:
$$\vec{\nabla}\overline{\psi} = \vec{\nabla}\overline{\psi' e^{i\Theta}} = \vec{\nabla}\overline{\psi'}\, e^{-i\Theta}$$

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\psi' e^{i\Theta} = e^{i\Theta} \vec{\nabla}\psi'$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\overline{\psi} \cdot \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\overline{\psi} \cdot \underbrace{e^{-i\Theta} e^{i\Theta}}_{=1} \vec{\nabla}\psi'$$
$$= \vec{\nabla}\overline{\psi}' \cdot \vec{\nabla}\psi'$$

$\underline{|\psi|}$:
$$|\psi| = |\psi' e^{i\Theta}| = \sqrt{\psi' e^{i\Theta}\, \overline{\psi' e^{i\Theta}}}$$
$$= \sqrt{\psi' e^{i\Theta} e^{-i\Theta} \overline{\psi'}} = \sqrt{\psi' \overline{\psi'}} = |\psi'|$$

$\square$

Nun $\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{p^2 t}{2m} = \Theta(\vec{x},t)$

$$\partial_t\psi = \partial_t \psi' e^{i\Theta} = e^{i\Theta}\partial_t\psi' + \psi' i e^{i\Theta}\partial_t\Theta$$

$$\text{mit } \partial_t(\Theta(\vec{x},t)) = \partial_t\left(\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{p^2 t}{2m}\right) = -\frac{p^2}{2m}$$

$$\vec{\nabla}\Theta = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\cdot\vec{x} - \frac{p^2 t}{2m}\right) = \vec{p}$$

$$\text{für } \vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}\psi' e^{i\Theta} = e^{i\Theta}\vec{\nabla}\psi' + \psi'\vec{\nabla}e^{i\Theta}$$
$$= e^{i\Theta}\vec{\nabla}\psi' + \psi' e^{i\Theta} i\vec{\nabla}\Theta$$

$$|e^{i\Theta}| = 1$$

- Die ersten 2 Terme einsetzen:

$$\bar{\psi}\, i\partial_t\psi - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}\bar{\psi}\cdot\vec{\nabla}\psi$$
$$= \bar{\psi}' e^{-i\Theta} i\left(e^{+i\Theta}\partial_t\psi' - i e^{i\Theta}\psi'\frac{p^2}{2m}\right)$$
$$+ -\frac{1}{2m}\left(e^{-i\Theta}\vec{\nabla}\bar{\psi}' - i\bar{\psi}' e^{-i\Theta}\vec{p}\right)\left(e^{i\Theta}\vec{\nabla}\psi' + i\psi' e^{i\Theta}\vec{p}\right)$$
$$= \bar{\psi}' i\partial_t\psi' + \cancel{\bar{\psi}'\psi'\frac{p^2}{2m}} - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}\bar{\psi}'\cdot\vec{\nabla}\psi' - \cancel{\bar{\psi}'\psi'\frac{p^2}{2m}}$$
$$= \bar{\psi}' i\partial_t\psi' - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}\bar{\psi}'\cdot\vec{\nabla}\psi'$$

$\square$

b) Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} - \sum_i \partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi)}$$

b) Die Euler-Langrange-Glg. mit zus. WW-Term

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} = 0$$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \mu \psi^* - g\psi^* \psi \psi^* = \mu \psi^* - g|\psi|^2 \psi^*$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^* \rightsquigarrow \frac{d}{dt}(i\psi^*) = i\,\partial_t \psi^*$

- $\sum \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi^*$

$$\rightsquigarrow +i\partial_t \psi^* = \mu\psi^* - g|\psi|^2\psi^* + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi^*$$
$$= \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi^* + (\mu - g|\psi|^2)\psi^*$$

<u>Für ψ:</u>

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\partial_t \psi + \mu\psi - g|\psi|^2\psi$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = 0$

- $\sum \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_i(\partial_i \psi^*)} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi$

$$\Rightarrow -i\partial_t \psi = (\mu - g|\psi|^2)\psi + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi$$
$$= \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi + (\mu - g|\psi|^2)\psi$$

Beide Gleichungen sind äquivalent, verknüpft durch $(\,)^*$.

c) Uniforme Lösung:

$$-i\partial_t \psi = (\mu - g|\psi|^2)\psi + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi$$

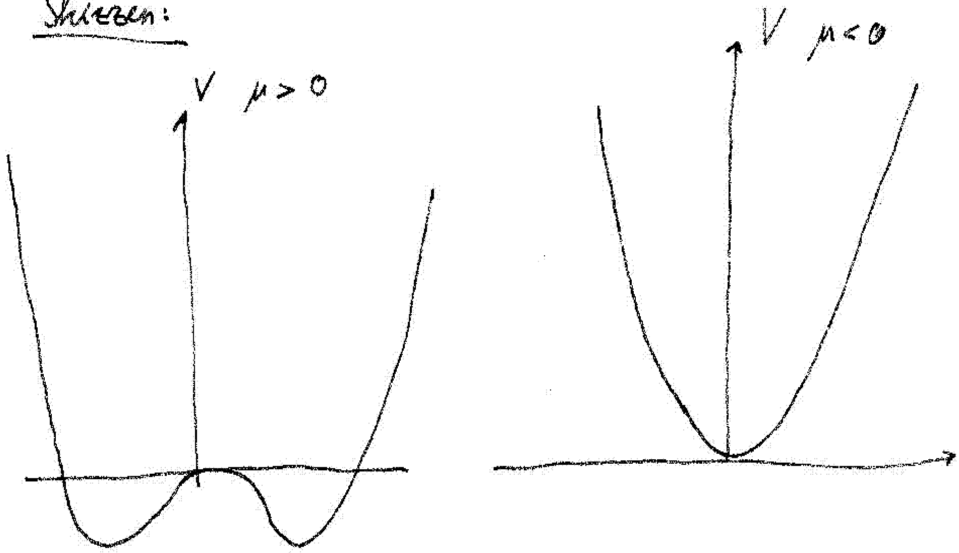
mit $\psi = \psi_0 = \text{const}: \partial_t \psi_0 = \vec{\nabla}^2 \psi_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu - g|\psi_0| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |\psi_0| = \frac{\mu}{g} \in \mathbb{R}$$

Mit $\mathcal{L} = T - V$ folgt $V = -\mu|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4$

<u>Skizzen:</u>



d) Sei $\psi(\vec{x},t) = \psi_0 + \delta\psi(x,t)$

Wir nähern nur bis zur 1. Ordnung. d.h. $O(\delta\psi^2) = 0$

ferner sei $|\mu| << 1$, d.h. $O(\mu^{3/2}) = 0$

Dies setzen wir in die GPE ein:

$$-i\partial_t(\psi_0+\delta\psi) = (\mu - g|\psi_0+\delta\psi|^2) + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi$$

$\psi_0+\delta\psi$

bzw: $$\left(i\partial_t + \mu - g|\psi|^2 + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\right)(\psi_0+\delta\psi) = 0$$

Berechnen wir zuerst das Betragsquadrat:

$$\begin{aligned}|\psi_0+\delta\psi|^2 &= (\psi_0+\delta\psi)(\bar{\psi}_0+\delta\psi) \\ &= \psi_0\bar{\psi}_0 + \psi_0(\delta\bar{\psi}+\delta\psi) + \cancel{O((\delta\psi)^2)} \\ &= \frac{\mu}{g} + \psi_0(\delta\bar{\psi}+\delta\psi).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}0 &= i\partial_t\delta\psi + \cancel{\mu\psi_0} + \mu\delta\psi - \cancel{g\psi_0^3} - 2g\psi_0^2\delta\psi - g\psi_0^2\delta\bar{\psi} + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\delta\psi \\ &= \Big(i\partial_t + \mu - 2g\underbrace{\psi_0^2}_{\mu/g} + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\Big)\delta\psi + -\mu\,\delta\bar{\psi} \\ &= \left(i\partial_t - \mu + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\right)\delta\psi - \mu\,\delta\bar{\psi} .\end{aligned}$$

Hätte man analog die Feldgleichung für $\bar{\psi}$ genommen vertauschen nur $\delta\bar{\psi}$ und $\delta\psi$ und $i\partial_t \to -i\partial_t$

$$\Rightarrow \left(-i\partial_t - \mu + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\right)\delta\bar{\psi} - \mu\,\delta\psi = 0$$

Dies schreiben wir in Matrix-Form, wobei wir den ∂_t Teil gleich auf die rechte Seite bringen:

$$\begin{pmatrix} \mu - \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} & \mu \\ -\mu & -\mu + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\bar{\psi} \end{pmatrix} = i\partial_t \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\bar{\psi} \end{pmatrix}$$

Nun fordern wir stationäre Lösung und setzen in Analogie:

$$i\partial_t \psi = E\psi$$

Damit folgt

$$\begin{pmatrix} \mu - \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} & \mu \\ -\mu & -\mu + \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\bar{\psi} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\bar{\psi} \end{pmatrix} .$$

Eigenwertgleichung, die es zu lösen gilt. Satz von Bezout u. Cauchy: $\det() \overset{!}{=} 0$. Wir ersetzen nach Korrespondenzprinzip

$\hbar = 1$: $\vec{\nabla} = i\vec{p}$ $\quad \vec{p} = \vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 = -k^2$

$$\det \begin{pmatrix} \mu + \frac{k^2}{2m} - E & \mu \\ -\mu & -\mu - \frac{k^2}{2m} - E \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\mu + \frac{k^2}{2m} - E\right)\left(-\mu - \frac{k^2}{2m} - E\right) + \mu^2$$

$$= \cancel{-\mu^2} - \left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + E^2 - \frac{\cancel{2}\mu k^2}{\cancel{2}m} + \cancel{\mu^2} = 0$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{k^2}{2m}\right) + \frac{\mu k^2}{m} .$$

oder $E = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + \frac{\mu k^2}{m}}$

für $k \approx 0$ geht k^4 schneller gegen 0 und so

$$E = k\sqrt{\mu/m}\,.$$

e) Die Impulsdichte berechnen wir aus dem Lagrangian

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^*$$

Die Poisson-Klammer müssen wir hier mit Funktionalableitungen berechnen:

$$\{F(\vec{x}), G(\vec{x})\} = \int d^3x'' \frac{\delta F(\vec{x}',t)}{\delta\varphi(\vec{x}'',t)} \cdot \frac{\delta G(\vec{x}^*,t)}{\delta\pi(\vec{x}'',t)} - \frac{\delta G(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{x}'',t)} \frac{\delta F(\vec{x}',t)}{\delta\varphi(\vec{x}'',t)}$$

in diesem Fall bedeutet dies:

$$\{\varphi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)\} = \int d^3x'' \underbrace{\frac{\delta\varphi(\vec{x},t)}{\delta\varphi(\vec{x}'',t)}}_{=\delta(\vec{x}-\vec{x}'')} \cdot \underbrace{\frac{\delta\pi(\vec{x}',t)}{\delta\pi(\vec{x}'',t)}}_{=\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')} - \cancel{\frac{\delta\pi(\vec{x}',t)}{\delta\varphi(\vec{x}'',t)} \cdot \frac{\delta\varphi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{x}'',t)}}$$

$$= \delta(\vec{x}'-\vec{x})$$

f) Wir ersetzen nach dem Korrespondenzprinzip:

$\psi(\vec{x},t) \to \hat{\psi}(\vec{x},t)$, $\pi(x,t) \to \hat{\pi}(\vec{x},t)$, $\{,\} \to -i[,]$

Damit folgt:

$$\{\psi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)\} = \{\psi(\vec{x},t), i\psi^*(\vec{x}',t)\} = \delta(\vec{x}'-\vec{x})$$

$$\Rightarrow \{\psi(\vec{x},t), \psi^*(\vec{x}',t)\} = -i\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}')$$

Wodurch folgt:

$$\left[\hat{\psi}(\vec{x},t),\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\right] = -i(i\,\delta(\vec{x}'-x)) = \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Den Kommutator im Impulsraum erhält man durch Fourier-Transformation:

$$\left[\hat{\psi}(\vec{x},t),\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\right] = \delta(\vec{x}'-\vec{x})\,.$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\vec{k},t) = \int d^3x\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}\;\hat{\psi}(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \left[\hat{\tilde{\psi}}(\vec{k},t),\hat{\tilde{\psi}}^{\dagger}(\vec{k}',t)\right] = \int \cancel{d^3x \int d^3x' \left[\hat{\psi}(\vec{x},t),\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\right] e}$$

$$= \int d^3x \int d^3x'$$

$$= \hat{\tilde{\psi}}(\vec{k},t)\hat{\tilde{\psi}}^{\dagger}(\vec{k}',t) - \hat{\tilde{\psi}}^{\dagger}(\vec{k}',t)\hat{\tilde{\psi}}(\vec{k},t)$$

$$= \int d^3x \int d^3x'\; \hat{\psi}(\vec{x},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\,e^{-i(\vec{x}\cdot\vec{k}-\vec{x}'\cdot\vec{k}')}$$

$$- \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\hat{\psi}(\vec{x},t)\,e^{-i(\vec{x}\cdot\vec{k}-\vec{x}'\cdot\vec{k}')}$$

$$= \int d^3x\, d^3x' \underbrace{\left[\hat{\psi}(\vec{x},t)\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t) - \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x}',t)\hat{\psi}(\vec{x},t)\right]}_{\delta(\vec{x}-\vec{x}')} e^{-i(\vec{x}\cdot\vec{k}-\vec{x}'\cdot\vec{k}')}$$

$$= \int d^3x\;\; e^{-ix(\vec{k}-\vec{k}')} = 2\pi\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad \square$$

Der Kommutator lautet:

$$\left[\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{H}\right] = \left[\hat{\psi}(\vec{x},t), \int d^3x' \, \frac{\vec{\nabla}'}{2m} \hat{\psi}'^{+} \cdot \vec{\nabla}\hat{\psi}' - \mu \hat{\psi}'^{+}\hat{\psi} + \frac{g}{2}(\hat{\psi}'^{+}\hat{\psi}')^2\right]$$

$$= \int d^3x' \, \frac{1}{2m} \left[\hat{\psi}(\vec{x},t), \vec{\nabla}'\hat{\psi}'^{+} \cdot \vec{\nabla}'\hat{\psi}'\right] - \mu\left[\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{\psi}'^{+}(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{x}',t)\right]$$

$$+ \frac{g}{2}\left[\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{\psi}^{+}(\vec{x}',t)\hat{\psi}(\vec{x}',t)\hat{\psi}'^{+}(\vec{x}',t)\hat{\psi}(\vec{x}',t)\right]$$

Wir rechnen die einzelnen Kommutatoren einzeln aus, wobei wir auf alle unnötigen Dekorationen verzichten. Der Gradient $\vec{\nabla}'$ wirkt nur auf $\vec{x}'$.

- $$[\psi, \nabla'\psi'^{+}\nabla'\psi'] = \nabla'\psi'^{+}[\psi, \nabla'\psi'] + [\psi, \nabla'\psi'^{+}]\nabla'\psi'$$

$$= \nabla'\psi'^{+}\nabla'\underbrace{[\psi,\psi']}_{=0} = \nabla'\underbrace{[\psi, \psi'^{+}]}_{=\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot \nabla'\psi'$$

$$= \nabla'\delta(\vec{x}-\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}'\psi'$$

$$= \cancel{\nabla'(\vec{\nabla}'\delta(\vec{x}-\vec{x}')\psi') - \nabla'^2}$$

$$= \underbrace{\nabla'(\delta(\vec{x}-\vec{x}')\vec{\nabla}'\psi')}_{\text{Oberflächenterm}=0} - \delta(\vec{x}-\vec{x}')\nabla'^2\psi'$$

- $$[\psi, \psi'^{+}\psi'] = 0 + [\psi, \psi'^{+}]\psi' = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\psi'$$

- $$[\psi, \psi'^{+}\psi'\psi'^{+}\psi'] = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\psi'\psi'^{+}\psi' + \psi'^{+}[\psi, \psi'\psi'^{+}\psi']$$

$$= \quad '' \quad + \psi'^{+}\psi'[\psi, \psi'^{+}\psi']$$

$$= \quad '' \quad + \psi'^{+}\psi'[\psi, \psi'^{+}]\psi'$$

$$= \delta(\vec{x}-\vec{x}')(\psi'\psi'^{+}\psi' + \psi'^{+}\psi'\psi')$$

Das heißt insgesamt folgt:

$$\left[\hat{\psi}, \hat{H}\right] = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\hat{\psi} - \mu\hat{\psi} + \frac{g}{2}\left(\hat{\psi}^+\hat{\psi}\hat{\psi} + \hat{\psi}\hat{\psi}^+\psi\right)$$

Mit der Heisenberg-Gleichung

$$i\partial_t \hat{A} = \left[\hat{A}, \hat{H}\right]$$

folgt die Feldgleichung:

$$i\partial_t \hat{\psi}(\vec{x},t) = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\hat{\psi} - \mu\hat{\psi} + \frac{g}{2}\left(\psi^+\hat{\psi}\hat{\psi} + \hat{\psi}\psi^+\psi\right)$$

vergleiche mit klassischer GPE:

$$+i\partial_t\psi = -\frac{\vec{\nabla}^2}{2m}\psi + -\mu\psi + g|\psi|\psi$$