Heiko Dumlich, Max Hoffmann 25. Juni 2007

9 Übungsblatt Theoretische Physik V

9.1 (Gauß-Integral)

a)

Zu zeigen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

mit $\Re(a) > 0$. Wir berechnen das Integral I^2:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) \exp\left(-\frac{a}{2}y^2\right) \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, r \, \exp\left(-\frac{a}{2}r^2\right) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{ar} \, r \, \exp(-u) \\ &= \frac{2\pi}{a} \end{aligned}$$

Daraus folgt also für $I = \sqrt{I^2}$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$\square$

b)

Zu zeigen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right)$$

mit $\Re(a) > 0$ und $b \in \mathbb{C}$. Umformung des Exponenten durch quadratische Ergänzung:

$$-\frac{a}{2}x^2 + bx = -\frac{a}{2}x^2 + bx + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{2a} = -\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x + \frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^2 + \frac{b^2}{2a}$$

Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I &= \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x + \frac{b}{\sqrt{2a}}\right)^2\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{2a}\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du\, \exp\left(-u^2\right)}_{:=J}
\end{aligned}
$$

Wir können noch schnell das Quadrat des Integrals ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
J^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right) \\
&= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r\, \exp\left(-r^2\right) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{2r}\, r\, \exp\left(-u^2\right) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Somit folgt also $J = \sqrt{\pi}$ und insgesamt für das Integral I:

$$
I = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{2a}\right)
$$

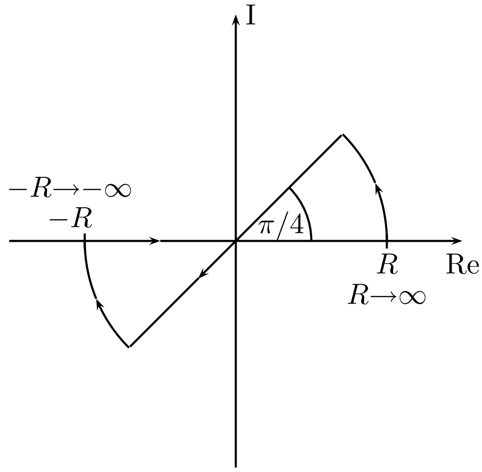
$\square$

c)

Es ist über Konturintegration zu zeigen:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(i\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} \cdot \begin{cases} \sqrt{i}, & a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{i}}, & a < 0 \end{cases}
$$

Die Kontur sieht folgendermaßen aus:



Die Beiträge der Kreisbögen müssen nicht betrachtet werden, da die Integration im und gegen den Uhrzeigersinn läuft und die Beträge gleich sind, somit diese sich also gegenseitig aufheben. Nun gilt zudem das Cauchy-Theorem:

$$\oint dz\, f(z) = 0$$

da wir keine Pole im Integrationsweg existieren. Wir können also unser Integral auf die Integration über den gedrehten Weg zurückführen. Es gilt:

$$\oint dz\, f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(i\frac{a}{2}x^2\right) + J = 0 \Leftrightarrow -J = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(i\frac{a}{2}x^2\right)$$

Wobei J das Integral für den gedrehten Weg ist. Dieses berechnen wir im folgenden. Es gilt $z = x + iy$, mit der Steigung $\frac{\pi}{4}$ folgt $y(x) = x$ und somit $z^2 = x^2(1 + 2i - 1) = 2ix^2$. Mit dem neuen Integrationsweg erhalten wir also:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\infty}^{-\infty} dz\, \exp\left(i\frac{a}{2}z^2\right) \cdot (1+i) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-ax^2\right) \\ &= -\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt für das zu bestimmende Integral:

$$-J = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(i\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

was nicht mit dem erwarteten Ergebnis übereinstimmt.

d)

Zu zeigen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} dx_i\right) e^{-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + b_i x_i} = \frac{\sqrt{2\pi}^N}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right) \cdot \mathbf{b}}.$$

Wir schreiben etwas um:

$$\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i\right) = d^N x.$$

(A_{ij}) ist rell und symmetrisch, besitzt also eine Ähnlichkeittransformation:

$$A_{ij} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O})_{ij} = O_{im} D_{mn} O_{nj}$$

mit

$$O^{-1} = O^T \text{ und } D_{mn} = \delta_{mn}\lambda^{(n)},$$

wobei $\lambda^{(n)}$ die Eigewerte von $\mathbf{A}$ sind.

$$\begin{aligned}
I &= \int d^N x \; e^{-\frac{1}{2}x_i O_{im}\delta_{mn}\lambda^{(n)} O_{nj} x_j + b_i x_i} \\
&= \int d^N x \; e^{-\frac{1}{2}x_i \lambda^{(n)} \underbrace{O_{in} O_{nj}}_{=\delta_{ij}} x_j + b_i x_i} \\
&= \int d^N x \; e^{-\frac{1}{2}\lambda^{(i)} x_i^2 + b_i x_i} \\
&= \prod_{i=1}^{N} \int dx_i \; e^{-\frac{1}{2}\lambda_i x_i^2 + b_i x_i}.
\end{aligned}$$

Jetzt gilt es wieder das Quadrat zu vervollständigen:

$$-\frac{\lambda_i}{2}x_i^2 + b_i x_i = -\left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{2}}x_i - \frac{b_i}{\sqrt{2\lambda_i}}\right)^2 + \frac{b_i^2}{2\lambda_i}$$

Substitution

$$u_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{2}}x_i \Rightarrow dx_i = \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}}du_i$$

$$\begin{aligned}
I &= \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}} e^{\frac{b_i^2}{2\lambda_i}} \int du_i e^{-u_i^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}^N}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}}
\end{aligned}$$

e)

9.2 (Einführung in das Pfadintegral)

a) Gegeben:

$$\mathcal{A}[x,j] = \mathcal{A}[x] - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; j(t')\, x(t')$$

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; G(t-t')\, j(t') \text{ mit } \partial_t^2 x_0(t) = -\omega^2 x_0(t)$$

Zeige:

$$\frac{\delta \mathcal{A}[x,j]}{\delta x(t)} = 0$$

Zuerst formen wir $\mathcal{A}[x]$ etwas um, wobei wir wie im folgenden Randterme von $x(t)$ und zeitliche Ableitungen davon vernachlässigen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[x] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \dot{x}^2 - \omega^2 x^2 \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \dot{x}\dot{x} - \omega^2 x^2\\
&\overset{\text{p.I.}}{=} 0 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ x\ddot{x} + \omega^2 x^2\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ x(t')\left(\partial_{t'}^2 + \omega^2\right) x(t')
\end{aligned}$$

Damit gestärkt rechnen wir los:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{A}[x,j]}{\delta x(t)} &= \frac{\delta \mathcal{A}[x]}{\delta x(t)} - \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t')\underbrace{\frac{\delta x(t')}{\delta x(t)}}_{=\delta(t-t')}\\
&= \frac{\delta \mathcal{A}[x]}{\delta x(t)} - j(t)\,.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nur den ersten Term:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{A}[x]}{\delta x(t)} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta x(t)}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ x(t')\left(\partial_{t'}^2 + \omega^2\right) x(t')\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \frac{\delta x(t')}{\delta x(t)}\left(\partial_{t'}^2 + \omega^2\right) x(t') - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ x(t')\left(\partial_{t'}^2 + \omega^2\right)\frac{\delta x(t')}{\delta x(t)}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) x(t) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ x(t')\left(\partial_{t'}^2 + \omega^2\right)\delta(t-t')
\end{aligned}$$

Um das verbleibende Integral auszuwerten, integrieren wir wieder partiell und vernachlässigen Randterme.

$$\begin{aligned}
\int dt'\ x(t')\,\partial_{t'}^2\delta(t-t') &= \int dt'\ \cancel{\partial_{t'}\left(x(t')\,\partial_{t'}\delta(t-t')\right)} - \dot{x}(t')\,\partial_{t'}\delta(t-t')\\
&= \int dt'\ \cancel{\left(-\partial_{t'}\left(\dot{x}(t')\,\delta(t-t')\right)\right)} + \ddot{x}(t')\,\delta(t-t')
\end{aligned}$$

Das bedeutet insgesamt:

$$\frac{\delta \mathcal{A}[x,j]}{\delta x(t)} = -\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) x(t) - j(t)$$

Hier betrachten wir wieder nur den ersten Term auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) x(t) &= \cancel{\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) x_0(t)} + \left(\partial_t^2 + \omega^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ G(t-t')\,j(t')\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \underbrace{\left[\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) G(t-t')\right]}_{=-\delta(t-t')} j(t') = -j(t)
\end{aligned}$$

womit insgesamt folgt

$$\frac{\delta \mathcal{A}[x,j]}{\delta x(t)} = 0.$$

b)

Zeige

$$Z[j] = Z[0] \exp\left[-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \ \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ j(t)\, G(t-t')\, j(t')\right]$$

mit

$$Z[j] = \int \mathcal{D}x \ e^{i\mathcal{A}[x,j]}$$

und somit

$$Z[0] = \int \mathcal{D}x \ e^{i\mathcal{A}[x,0]} = \int \mathcal{D}x \ e^{iA[x]} = \int \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \ \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)}.$$

Wir betrachten nur den Exponenten:

$$A[x,j] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \ \left[\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) - 2j(t)\, x(t)\right]$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t') \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_0(t) + \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{x}_0^2 + \left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right)^2 + 2\dot{x}_0 \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t') \\ x^2 &= x_0^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right)^2 + 2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t'). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[x,j] = \ & \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \ \Bigg[\dot{x}_0^2 - \omega^2 x^2 + \left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right)^2 - \omega^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right)^2 \\ & +2\left(\dot{x}_0 \partial_t - \omega^2 x_0\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t') - 2j(t)\left[x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right]\Bigg]. \end{aligned}$$

Für den Term

$$\left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ G(t-t')\, j(t')\right)^2$$

benutzen wir wieder den gleichen Trick wie bei (1) bloß etwas komplizierter aufgeschrieben.

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right)^2 \\
=\;& \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right) \left(\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right) \\
=\;& 0 - \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right) \cdot \left(\partial_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right).
\end{aligned}
$$

Außerdem ist

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \dot{x}_0 \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right) \;=\; 0 - \int_{-\infty}^{\infty} dt \, x_0 \partial_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right).
$$

Damit folgt:.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\left[x, j\right] \;=\;& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \Bigg[\dot{x}_0^2 - \omega^2 x^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \underbrace{\left(-\partial_t^2 - \omega^2\right) \, G\left(t-t'\right)}_{\delta(t-t')} j\left(t'\right) \\
& +2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \underbrace{\left(-\partial_t^2 - \omega^2\right) G\left(t-t'\right)}_{=\delta(t-t')} j\left(t'\right) - j\left(t\right) \left[x_0\left(t\right) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right]\Bigg] \\
=\;& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \Bigg[\dot{x}_0^2 - \omega^2 x^2 + \cancelto{1}{j\left(t\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right)} + \cancel{2x_0\left(t\right) j\left(t\right) - 2x_0\left(t\right) j\left(t\right)} \\
& -\cancelto{1}{2} j\left(t\right)) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)\right)\Bigg] \\
=\;& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \dot{x}_0^2 - \omega^2 x^2 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, j\left(t\right) G\left(t-t'\right) j\left(t'\right)
\end{aligned}
$$

Und wieder eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
Z\left[j\right] \;=\;& \int \mathcal{D}x \; e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)} e^{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, j(t)G(t-t')j(t')} \\
=\;& Z\left[0\right] e^{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, j(t)G(t-t')j(t')}
\end{aligned}
$$

c)

Es ist zu zeigen:

$$
G\left(t_1 - t_2\right) \;=\; \frac{i}{Z\left[0\right]} \frac{\delta^2 Z\left[j\right]}{\delta j\left(t_1\right) \delta j\left(t_2\right)}\Bigg|_{j=0}.
$$

Wir berechnen erst die eine Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z[j]}{\delta j(t_1)} &= \frac{\delta}{\delta j(t_1)} Z[0] \exp\left[-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t)\, G(t-t')\, j(t')\right] \\
&= Z[j]\left(-\frac{i}{2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ \frac{\delta j(t)}{\delta j(t_1)} G(t-t')\, j(t')\right. \\
&\qquad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t)\, G(t-t')\, \frac{\delta j(t')}{\delta j(t_1)}\right) \\
&= Z[j]\left(-\frac{i}{2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ G(t_1-t')\, j(t') + \int_{-\infty}^{\infty} dt\ j(t)\, G(t-t_1)\right) \\
[G(t)=G(-t)] \quad &= Z[j](-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ j(t)\, G(t-t_1)
\end{aligned}$$

und dann die andere:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)} &= \frac{\delta Z[j]}{\delta j(t_2)}\left(Z[j](-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ j(t)\, G(t-t_1)\right) \\
&= Z[j](-i)(-i)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ j(t)\, G(t-t_1)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ j(t)\, G(t-t_2) \\
&\quad + Z[j](-i)\, G(t_1-t_2)\,.
\end{aligned}$$

Setzte man nun $j=0$ wird der erste Summand identisch 0 und wir erhalten:

$$G(t_1-t_2) = \frac{i}{Z[0]}\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)}\bigg|_{j=0}.$$

Es ist zu zeigen:

$$G(t_1-t_2) == -\frac{i}{Z[0]}\int \mathcal{D}x\ x(t_1)\, x(t_2)\, e^{i\mathcal{A}[x]}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)} &= \frac{\delta^2}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)}\int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x,j]} \\
&= \frac{\delta^2}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)}\int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x]-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t')x(t')} \\
&= \frac{\delta^2}{\delta j(t_1)}\int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x]-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t')x(t')}\,(-ix(t_1)) \\
&= \int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x]-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t')x(t')}\,(-ix(t_1))\,(-ix(t_2)) \\
&= -\int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x]-i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\ j(t')x(t')}\, ix(t_1)\, x(t_2)
\end{aligned}$$

Setzt man wieder $j=0$ folgt:

$$\frac{i}{Z[0]}\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\,\delta j(t_2)}\bigg|_{j=0} = -\int \mathcal{D}x\ e^{i\mathcal{A}[x]}\, ix(t_1)\, x(t_2)$$

d)

Betrachte
$$\left(\partial_t^2+\omega^2\right)G\left(t\right)=-\delta\left(t\right),$$
was man für $t'=0$ erhält. Die Fourier-Transformierte der δ-Funktion ist bekanntlich konstant 1. Die Green'sche Funktion $G\left(t\right)$ mit ihrer Fourier-Transformierten $\tilde{G}\left(\Omega\right)$ verknüpft durch:
$$\tilde{G}\left(\Omega\right)=\int dt\; G\left(t\right)e^{-i\Omega t}$$
$$G\left(t\right)=\int\frac{d\Omega}{2\pi}\tilde{G}\left(t\right)e^{i\Omega t}. \tag{2}$$
Wendet man auf (2) den Operator $\left(\partial_t^2+\omega^2\right)$ an, erhält man:
$$-\delta\left(t\right)=\left(\partial_t^2+\omega^2\right)\int\frac{d\Omega}{2\pi}\tilde{G}\left(\Omega\right)e^{i\Omega t}=\int\frac{d\Omega}{2\pi}\underbrace{\left(\omega^2-\Omega^2\right)\tilde{G}\left(\Omega\right)}_{\overset{!}{=}-1}e^{i\Omega t}$$
woraus folgt:
$$\tilde{G}\left(\omega\right)=\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}.$$
Nun kann man die Green'sche Funktion bestimmen mittels (2). Hierzu zerlegen wir erst den Integranden:
$$\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}=\frac{A}{\Omega-\omega}+\frac{B}{\Omega+\omega}$$
$$\Rightarrow A=-B\Rightarrow A=\frac{1}{2\omega}$$
$$\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}=\frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{\Omega+\omega}-\frac{1}{\Omega-\omega}\right).$$
Als integrierenden Faktor führen wir jeweils $i\varepsilon$ ein.
$$G\left(t\right)=\frac{1}{2\omega}\int\frac{d\Omega}{2\pi}\left(\frac{e^{i\Omega t}}{\Omega+\omega-i\varepsilon}-\frac{e^{i\Omega t}}{\Omega-\omega+i\varepsilon}\right)$$
Wir wenden den Residuensatz an, unterscheiden implizit zwischen $t>0$ und $t<0$ und erhalten:
$$G\left(t\right)=\frac{i2\pi}{2\omega}\frac{1}{2\pi}\left(\theta\left(t\right)e^{-i\omega t-\varepsilon t}+\theta\left(-t\right)e^{i\omega t+\varepsilon t}\right).$$
Lässt man jetzt wieder $\varepsilon\to 0$ laufen folgt:
$$G\left(t\right)=\frac{i}{2\omega}\left(\theta\left(t\right)e^{-i\omega t}+\theta\left(-t\right)e^{i\omega t}\right)$$

e)

Zuletzt berechnen wir noch das Matrixelement:

$$\langle 0 \left| T \left[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \right] \right| 0 \rangle \tag{3}$$

mit

$$T \left[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \right] = \theta(t_1 - t_2) \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{x}(t_2) x(t_1) .$$

Zuerst drücken wir den Ortsoperator durch den Erzeugungs- und Vernichtungsoperator aus. Mit $\hbar = m = 1$ folgt:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t) \right)$$

Dies setzen wir (3) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 \left| T \left[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) \right] \right| 0 \rangle \\
= & \langle 0 \left| \theta(t_1 - t_2) \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{x}(t_2) x(t_1) \right| 0 \rangle \\
= & \left\langle 0 \middle| \theta(t_1 - t_2) \frac{1}{2\omega} \left(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1) \right) \left(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2) \right) \right. \\
& \left. + \theta(t_2 - t_1) \frac{1}{2\omega} \left(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1) \right) \left(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2) \right) \middle| 0 \right\rangle \\
= & \left\langle 0 \middle| \theta(t_1 - t_2) \frac{1}{2\omega} \left(\cancel{\hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}^\dagger(t_2)} + \cancel{\hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}(t_2)} + \underbrace{\hat{a}(t_1) \hat{a}^\dagger(t_2)}_{=e^{i\omega(t_2 - t_1)}} + \cancel{\hat{a}(t_1) \hat{a}(t_2)} \right) \right. \\
& \left. + \theta(t_2 - t_1) \frac{1}{2\omega} \left(\cancel{\hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}^\dagger(t_2)} + \cancel{\hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}(t_2)} + \underbrace{\hat{a}(t_1) \hat{a}^\dagger(t_2)}_{=e^{i\omega(t_1 - t_2)}} + \cancel{\hat{a}(t_1) \hat{a}(t_2)} \right) \middle| 0 \right\rangle \\
& \frac{1}{2\omega} \left(\theta(t_1 - t_2) e^{i\omega(t_2 - t_1)} + \theta(t_2 - t_1) e^{i\omega(t_1 - t_2)} \right)
\end{aligned}$$

Bis auf ein „i" gleicht dieses Ergebnis sehr dem von Aufgabenteil d) für $t = t_1 - t_2$.