Heiko Dumlich, Max Hoffmann 17. Juni 2007

8 Übungsblatt Theoretische Physik V

8.1 (Quark-Modelle und magnetisches Moment)

a)

Zu zeigen ist, dass ein Protonzustand zwei u-Quarks und ein d-Quark enthält, während ein Neutronzustand zwei d-Quarks und ein u-Quark enthält. Wir betrachten hierzu die Ladung Q, welche für das Proton $Q_p = 1$ und für das Neutron $Q_n = 0$ beträgt. In **Aufgabe 10** haben wir die Definition der Ladung betrachtet, wobei diese über

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

mit $Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ und $I_3 = \lambda_3/2$ definiert ist, es ergibt sich also:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}+\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Mit dem Erwartungswert:

$$\langle Q \rangle = \left(u^\dagger d^\dagger s^\dagger\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \left(u^\dagger d^\dagger s^\dagger\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3}u \\ -\frac{1}{3}d \\ -\frac{1}{3}s \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}uu^\dagger - \frac{1}{3}dd^\dagger - \frac{1}{3}ss^\dagger\right)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} Q_u &= \frac{2}{3} \\ Q_d &= -\frac{1}{3} \\ Q_s &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Da Neutronen und Protonen nicht aus s-Quarks aufgebaut sind, bleibt nur die folgende Quark-Kombination für deren Aufbau übrig:

$$\begin{aligned} Q_p &= 1 = 2Q_u + Q_d = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ Q_n &= 0 = Q_u + 2Q_d = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

anders kann die Ladung nicht erreicht werden. D.h. also ein Proton besteht aus $p = uud$ und ein Neutron aus $n = udd$.

b)

Es sind die Zustände $|p^\uparrow\rangle$ und $|n^\uparrow\rangle$ zu bestimmen.
Wir betrachten hierzu, wobei $\{P\}$ die Permutation sei:

$$
\begin{aligned}
|p^\uparrow\rangle &= \sum_{\{P\}} P_{123}|u^\uparrow(1)\rangle\Big[|u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle\Big] \\
&= |u^\uparrow(1)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |u^\uparrow(1)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle \\
&+ |u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle \\
&+ |d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle - |u^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle \\
&+ |u^\uparrow(2)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle \\
&+ |u^\uparrow(1)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle - |u^\uparrow(1)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle \\
&+ |d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle - |u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle|u^\uparrow(1)\rangle \\
&= |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle \\
&+ |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle \\
&+ |u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle \\
&= 2|u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + 2|u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2|d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \\
&- \Big(|u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle + |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle + |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle\Big) \\
&- \Big(|u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Wir können den Zustand normieren, es ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
|p^\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}|u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow \\
&- \frac{1}{2}\Big(u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\Big)\rangle
\end{aligned}
$$

Der Neutronenzustand ist bis auf den Austausch eines u mit einem d Quark zum Protonenzustand äquivalent, wir rechnen dies wieder explizit nach:

$$
\begin{aligned}
|n^\uparrow\rangle &= \sum_{\{P\}} P_{123}|d^\uparrow(1)\rangle\Big[|u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle\Big] \\
&= |d^\uparrow(1)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |d^\uparrow(1)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle \\
&+ |u^\uparrow(2)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle \\
&+ |d^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle - |u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle \\
&+ |u^\uparrow(2)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle - |d^\uparrow(2)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle \\
&+ |d^\uparrow(1)\rangle|d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle - |d^\uparrow(1)\rangle|u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle \\
&+ |d^\downarrow(3)\rangle|u^\uparrow(2)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle - |u^\downarrow(3)\rangle|d^\uparrow(2)\rangle|d^\uparrow(1)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \; |d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle - |d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle \\
&+ \; |d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle - |d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle \\
&+ \; |d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle \\
&= \; |d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + |u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow\rangle + |d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle + |u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow\rangle \\
&+ \; |d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + |d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle \\
&- \; 2\Big(|d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle + |d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle + |u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Wir können den Zustand normieren, es ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
|n^\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}|\frac{1}{2}\Big(d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow + d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow + d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\Big) \\
&- \Big(d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\Big)\rangle
\end{aligned}
$$

Vergleich von $|n^\uparrow\rangle$ und $|p^\uparrow\rangle$ lässt erkennen, dass diese ähnlich aussehen, wobei man ein jeweils ein u in ein d umtauschen muss, um von p zu n zu kommen und zudem das Vorzeichen von n negativ ist im Verhältnis zu p.

c)

Es ist das Verhältnis von $\frac{\mu_n}{\mu_p}$ zu berechnen, wobei:

$$
\begin{aligned}
Q \times \sigma_3|p^\uparrow\rangle &= \Big(\mu_p|p^\uparrow\rangle + \mu_p^*|\Delta^{*+}\rangle\Big) \\
Q \times \sigma_3|n^\uparrow\rangle &= \Big(\mu_n|n^\uparrow\rangle + \mu_n^*|\Delta^{*+}\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt für das Verhältnis von μ_p zu μ_n:

$$
\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\langle n^\uparrow|Q \times \sigma_3|n^\uparrow\rangle}{\langle p^\uparrow|Q \times \sigma_3|p^\uparrow\rangle}
$$

Es gilt allgemein:

$$
\langle ab|AB|ab\rangle = \langle a|A|a\rangle\langle b|B|b\rangle
$$

d.h. speziell für uns:

$$
\langle n^\uparrow|Q \times \sigma_3|n^\uparrow\rangle = \langle n^\uparrow|Q|n^\uparrow\rangle \times \langle n^\uparrow|\sigma_3|n^\uparrow\rangle
$$

mit

$$
\langle n^\uparrow|\sigma_3|n^\uparrow\rangle = \langle p^\uparrow|\sigma_3|p^\uparrow\rangle
$$

folgt also

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\langle n^\uparrow | Q | n^\uparrow \rangle}{\langle p^\uparrow | Q | p^\uparrow \rangle}$$

Die Verwendung von:

$$Q \times \sigma_3 \begin{pmatrix} u^\uparrow \\ u^\downarrow \\ d^\uparrow \\ d^\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

beschleunigt die Rechnung.
Wir berechnen also zuerst μ_p:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \langle p^\uparrow | Q \times \sigma_3 | p^\uparrow \rangle \\ &= \frac{2}{9}\left(3 \cdot \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{10}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{11}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |p^\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} | u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow \\ &- \frac{1}{2}\left(u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\right)\rangle \end{aligned}$$

Für μ_n erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \langle n^\uparrow | Q \times \sigma_3 | n^\uparrow \rangle \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{4}\left(6 \cdot \frac{2}{3}\right) - \left(-3 \cdot \frac{4}{3}\right)\right) \\ &= \frac{2}{9}(1+4) \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |n^\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} | \frac{1}{2}\left(d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow + d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow + d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\right) \\ &- \left(d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow\right)\rangle \end{aligned}$$

Somit folgt also für das Verhältnis:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{\langle n^{\uparrow}|Q \times \sigma_3|n^{\uparrow}\rangle}{\langle p^{\uparrow}|Q \times \sigma_3|p^{\uparrow}\rangle} = \frac{10}{11}$$

Jedoch sollte eigentlich folgendes Verhältnis folgen:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}$$

8.2 (Spin-1)

Ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ transformiert wie

$$A_i^{'}(\mathbf{x}) = R_{ij} A_j \left(R^{-1}\mathbf{x}\right). \tag{1}$$

a) Wir benutzen die Matrix für eine Koordinatentransformation unter aktiver Drehung:

$$D\left(R_z(\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies mit (1) angewendet führt auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{'} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi A_x\left(\mathbf{x}^{'}\right) - \sin\varphi A_y\left(\mathbf{x}^{'}\right) \\ \sin\varphi A_x\left(\mathbf{x}^{'}\right) + \cos\varphi A_y\left(\mathbf{x}^{'}\right) \\ A_z\left(\mathbf{x}^{'}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi A_x - \sin\varphi A_y \\ \sin\varphi A_x + \cos\varphi A_y \\ A_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\, x + \sin(\varphi)\, y \\ -\sin(\varphi)\, x + \cos(\varphi)\, y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Eine Rotation um die z-Achse um einen infinitesimalen Winkel $d\varphi$ lautet bis zur ersten Ordnung:

$$R_z(d\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die angewandt auf ein Vektorfeld liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\left(R^{-1}\mathbf{x}\right) &= \mathbf{A}(x + d\varphi y, y - d\varphi, z) \\ &= \mathbf{A}(x, y, z) + d\varphi y \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - d\varphi x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \end{aligned}$$

Mit

$$\hat{L}_z = -i\left(x\partial_y - y\partial_x\right)$$

führt der Grenzwert für endliche Winkel wie schon in **Aufgabe 6** gezeigt:

$$R_z(\varphi) = e^{-i\varphi \hat{L}_z}.$$

c) Wendet man nun R_z gemäß (1) auf $\mathbf{A}$ an folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} A_x - d\varphi A_y \\ A_y + d\varphi A_x \\ A_z \end{bmatrix} (x + yd\varphi, y - xd\varphi, z) \\
&= (1 + yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y) \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}(x,y,z) \\
&= \begin{pmatrix} 1 + yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y & -d\varphi - y\cancel{d\varphi^2}\partial_x + x\cancel{d\varphi^2}\partial_y & 0 \\ d\varphi + y\cancel{d\varphi^2}\partial_x - x\cancel{d\varphi^2}\partial_y & 1 + yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 + yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y \end{pmatrix} \mathbf{A}(x,y,z) \\
&= \left[\mathbf{1} + \begin{pmatrix} yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y & 0 & 0 \\ 0 & yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & yd\varphi\partial_x - xd\varphi\partial_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \mathbf{A}(x,y,z) \\
&= \left[\mathbf{1} - id\varphi \left(\underbrace{-i(x\partial_y - y\partial_x)}_{=\hat{L}_z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{S}_z} \right)\right] \mathbf{A}(x,y,z) \\
&= \left[\mathbf{1} - id\varphi \left(\hat{L}_z + \hat{S}_z\right)\right] \mathbf{A}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Das heißt, wir haben hier eine reduzible 3×3 Darstellung für den Spinoperator $\hat{S}_z$ gefunden. Analog findet man die Darstellungen für die anderen Achsen.

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man schnell sieht, ist dies eine Darstellung für einen Drehimpulsoperator, denn:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{S}_z
\end{aligned}$$

$$\left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{S}_x$$

$$\left[\hat{S}_z, \hat{S}_x\right] = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{S}_y.$$

Das bedeutet insgesamt:

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k$$

Jetzt noch schnell $\hat{\mathbf{S}}^2$ ausrechnen:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E$$

d) Der Operator $\hat{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla} = \hat{S}_x\partial_x + \hat{S}_y\partial_y + \hat{S}_z\partial_z$ lautet ausgeschrieben:

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_y & i\partial_z \\ i\partial_z & 0 & -i\partial_x \\ -i\partial_y & i\partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

Angewandt auf ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{A}$ folgt:

$$\left(\hat{S} \cdot \vec{\nabla}\right)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_y & i\partial_z \\ i\partial_z & 0 & -i\partial_x \\ -i\partial_y & i\partial_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$= \quad i \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = i\vec{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Betrachtet man nun, noch, dass wir von atomaren Einheiten, wo $c = 1$ galt, kommen, sieht man, dass:

$$i\partial_t \mathbf{E} = \left(\hat{S} \cdot \vec{\nabla}\right) \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow {}_t\mathbf{E} - \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0$$

$$i\partial_t \mathbf{B} = -\left(\hat{S} \cdot \vec{\nabla}\right) \cdot \mathbf{E} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = 0.$$