Heiko Dumlich, Max Hoffmann 3. Juni 2007

Quantenmechanik 2 Übung 6

Aufgabe 8

a) Wir rechnen explizit nach indem wir die Lösungen für ein ruhendes System mit der folgenden Darstellung der LORENTZ-Transformation *boosten:*

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der zu ψ adjungierte Spinor ist definiert als

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \qquad \text{mit } \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Merke, mit $\hbar = c = 1$ gilt.

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

und

$$p_-^\dagger = p_+ \qquad p_+^\dagger = p_-.$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^1(k)\, u^1(k) &= \frac{E+m}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_z}{E+m} & -\frac{p_-}{E+m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m} \left(1 + \frac{-p_z^2}{(E+m)^2} - \frac{p_- p_+}{(E+m)^2} \right) \\
[p_- p_+ = p_x^2 + p_y^2] \quad &= \frac{E+m}{2m} \left(1 + \frac{-p^2}{(E+m)^2} \right) \\
\text{[ausmultiplizieren]} \quad &= \frac{E+m}{2m} - \frac{p^2}{2m(E+m)} \\
\text{[Hauptnenner]} \quad &= \frac{(E+m)^2 - p^2}{2m(E+m)} \\
&= \frac{E^2 + 2mE + m^2 - p^2}{2m(E+m)} \\
&= \frac{p^2 + m^2 + 2mE + m^2 - p^2}{2m(E+m)} \\
&= \frac{2m(E+m)}{2m(E+m)} = 1
\end{aligned}$$

Ganz analog geht

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^1(k)\,u^2(k) &= \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_z}{E+m} & -\frac{p_-}{E+m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m}\left(\frac{-p_z p_- + p_- p_z}{E+m}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^2(k)\,u^1(k) &= \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{p_+}{E+m} & \frac{p_z}{E+m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m}\end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m}\left(\frac{-p_+ p_z + p_z p_+}{E+m}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^2(k)\,u^2(k) &= \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{p_+}{E+m} & \frac{p_z}{E+m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m}\left(1 + \frac{-p^2}{(E+m)^2}\right) \\
&= \frac{(E+m)^2 - p^2}{2m\,(E+m)} = \frac{p^2 + m^2 + 2mE + m^2 - p^2}{2m\,(E+m)} \\
&= \frac{2m\,(E+m)}{2m\,(E+m)} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^1(k)\,v^1(k) &= \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m}\left(\frac{p^2}{(E+m)^2} - 1\right) = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}^2(k)\,v^2(k) &= \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} \frac{p_+}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2m}\left(\frac{p^2}{(E+m)^2} - 1\right) = -1
\end{aligned}
$$

$$\bar{v}^1(k)\, v^2(k) \quad = \quad \frac{E+m}{2m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{v}^2(k)\, v^1(k) = \frac{E+m}{2m} \begin{pmatrix} \frac{p_+}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(\not{k}+m)\,\gamma^0\,(\not{k}+m) &= (\not{k}+m)\begin{pmatrix} (\not{k}+m) & 0 \\ 0 & -(\not{k}+m) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\not{k}+m)^2 & 0 \\ 0 & -(\not{k}+m)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \not{k}^2+m^2+2m\not{k} & 0 \\ 0 & -\left(\not{k}^2+m^2+2m\not{k}\right) \end{pmatrix} \\
\left[\not{k}^2 = m^2\right] \quad &= \begin{pmatrix} 2m^2+2m\not{k} & 0 \\ 0 & -\left(2m^2+2m\not{k}\right) \end{pmatrix} \\
&= 2m\,(m+\not{k})\,\gamma^0.
\end{aligned}$$

Nun soll die Darstellung

$$\Lambda_+(k) = \sum_{r=1}^{2} u^r(k) \otimes \bar{u}^r(k) = \frac{\not{k}+m}{2m}$$

$$\Lambda_-(k) = \sum_{r=1}^{2} v^r(k) \otimes \bar{v}^r(k) = \frac{-\not{k}+m}{2m}$$

verifiziert werden.

Hierfür bedienen wir uns auf der einen Seite der Ergebnisse von Aufgabe **8a**:

$$\begin{aligned}
\Lambda_+(k)\, u^1(k) &= \left(u^1(k)\otimes\bar{u}^1(k) + u^2(k)\otimes\bar{u}^2(k)\right) u^1(k) \\
&= u^1(k)\otimes\underbrace{\bar{u}^1(k)\,u^1(k)}_{1} + u^2(k)\otimes\underbrace{\bar{u}^2(k)\,u^1(k)}_{0} \\
&= u^1(k)\,.
\end{aligned}$$

Und wieder ganz analog überzeugen wir uns, dass:

$$\begin{aligned}
\Lambda_+(k)\, u^2(k) &= u^2(k) \\
\Lambda_+(k)\, v^1(k) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_+ (k)\, v^2 (k) &= 0 \\
\Lambda_- (k)\, u^1 (k) &= 0 \\
\Lambda_- (k)\, u^2 (k) &= 0 \\
\Lambda_- (k)\, v^1 (k) &= v^1 (k) \\
\Lambda_- (k)\, u^2 (k) &= u^2 (k)\,.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite benutzen wir die Bewegungsgleichungen von **7a**:

$$\begin{aligned}
(\not k - m)\, u (k) &= 0 \\
(\not k + m)\, v (k) &= 0
\end{aligned}$$

Hier gilt also

$$\begin{aligned}
\Lambda_+ (k)\, u^1 (k) &= \frac{\not k + m}{2m} u (k) \\
[-m + m = 0] &= \frac{\cancel{\not k - m} + m + m}{2m} u (k) \\
&= \frac{2m}{2m} u (k) = u (k)
\end{aligned}$$

und

$$\Lambda_+ (k)\, v (k) = \frac{\not k + m}{2m} v (k) = 0.$$

Die anderen Projektionen gehen ganz genauso. Wir sehen also, dass es sich um zwei äquivalente Darstellungen der Operation $\Lambda_\pm$ handelt, die die positiven bzw. negativen Energielösungen herausprojiziert.

c) Mit der soeben untersuchten Darstellung, kann man nun schnell einige Eigenschaften von $\Lambda_\pm$ überprüfen:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\pm^2 &= \left(\frac{\pm \not k + m}{2m} \right)^2 \\
\left[\not k^2 = m^2 \right] &= \frac{\not k^2 + m^2 \pm 2m \not k}{4m^2} \\
\text{[kürzen]} &= \frac{\pm 2m \not k + 2m^2}{4m^2} \\
&= \frac{\pm \not k + m}{2m} \\
&= \Lambda_\pm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\ \Lambda_\pm &= \frac{\pm \not k + m}{2m} + \frac{\pm \not k + m}{2m} + \frac{\mp \not k + m}{2m} + \frac{\mp \not k + m}{2m} \\
&= \frac{4m}{2m} = 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_+ + \Lambda_- &= \frac{+\not{k} + m}{2m} + \frac{-\not{k} + m}{2m} \\
&= \frac{2m}{2m} = 1
\end{aligned}
$$

d) Zu zeigen ist

$$
-\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n}\not{k} = W_\mu n^\mu, \tag{1}
$$

wobei n^μ ein raumartiger Vektor mit $n_\mu n^\mu = -1$ ist. Wir wechseln wieder in das Ruhesystem, wo

$$
k = \begin{pmatrix} k^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

gilt, und damit also $k_\mu n^\mu = 0$. Um die Rechnung zu vereinfachen, wählen wir

$$
n = \begin{pmatrix} 0 & n^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Der Pauli-Lubanski Vektor ist definiert durch

$$
W_\mu = -\frac{1}{4i}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma.
$$

Wir identifizieren den Impulsvektor

$$
k^\sigma = \frac{\partial^\sigma}{i}
$$

und erhalten für die rechte Seite von (1) mit $\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\nu\rho} - i\sigma^{\nu\rho}$

$$
\begin{aligned}
W_\mu n^\mu &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \sigma^{\nu\rho} k^\sigma \\
&= -\frac{1}{4}\varepsilon_{1\nu\rho 0} n^1 \sigma^{\nu\rho} k^0 \\
[\nu,\rho \in \{2,3\}] \quad &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{1\nu\rho 0} n^1 i\gamma^\nu\gamma^\rho k^0 \\
&= -\frac{i}{4}\left(\varepsilon_{1230} n^1 k^0 \gamma^2\gamma^3 + \underbrace{\varepsilon_{1320}}_{-1} n^1 k^0 \underbrace{\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^3}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\left(n^1 k^0 \gamma^2\gamma^3\right)
\end{aligned}
$$

und für die rechte Seite von (1)

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\gamma^5 \not{n}\not{k} &= -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \underbrace{n^1\gamma_1}_{-n^1\gamma^1} \underbrace{k^0\gamma_0}_{-k^0\gamma^0} \\
&= \frac{i}{2} n^1 k^0 \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} n^1 k^0 \gamma^0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^2 \gamma^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 \\
&= \frac{i}{2} n^1 k^0 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \\
&= \frac{i}{2} n^1 k^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma^2 \gamma^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2} n^1 k^0 \gamma^2 \gamma^3
\end{aligned}
$$

Der Vergleich, zeigt, dass beide Seiten gleich sind.

Wir betrachten wieder den Pauli-Lubanski Vektor in der Form

$$W_\mu = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\nu\rho} k^\sigma .$$

Im Ruhesystem ist, wenn $k^0 := m$

$$k = \begin{pmatrix} k^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und man erhält

$$
\begin{aligned}
W_\mu &= -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho 0} \sigma^{\nu\rho} k^0 \\
&= -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho 0} \sigma^{\nu\rho} m \\
&= -\frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho 0} \gamma^\nu \gamma^\rho m .
\end{aligned}
$$

Dann gilt zum einen

$$\frac{W_0}{m} = -\frac{i}{4} \underbrace{\varepsilon_{0\nu\rho 0}}_{0} \gamma^\nu \gamma^\rho = 0 .$$

Zum anderen folgt aus

$$\left[\sigma^i, \sigma^j\right] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma^k ,$$

dass,

$$\left[\gamma^i, \gamma^j\right] = 2i \varepsilon_{ijk} \Sigma_k .$$

Nun kann man sich an einem typischen Beispiel klar machen, dass auch

$$\frac{\mathbf{W}}{m} = \frac{1}{2} \mathbf{\Sigma}$$

mit

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{W_1}{m} &= -\frac{i}{4}\varepsilon_{1\nu\rho 0}\gamma^\nu\gamma^\rho \\
&= -\frac{i}{4}\left(\varepsilon_{1230}\gamma^2\gamma^3+\varepsilon_{1320}\gamma^3\gamma^2\right) \\
&= -\frac{i}{4}\left[\gamma^2,\gamma^3\right] \\
&= -\frac{i}{4}\cdot 2i\Sigma_1 = \frac{\Sigma_1}{2}.
\end{aligned}$$

f) Wir wollen zeigen, dass

$$[\Lambda_\pm, P(n)] = 0.$$

Um zu zeigen, dass der Kommutator verschwindet, vereinfachen sich beide Operatoren etwas, wenn man alles wegwirft, was ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist (vgl. 2. Schur-sches Lemma):

$$\begin{aligned}
[\Lambda_\pm, P(n)] &= \left[\frac{\pm\not{k}+m}{2m}, \frac{1}{2}(I+\gamma_5\not{n})\right] \\
&\rightsquigarrow \quad [\pm\not{k}, \gamma_5\not{n}]
\end{aligned}$$

Wir nehmen weiterhin an, dass n ein raumartiger Vektor ist $n = \begin{pmatrix} 0 & n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix}$ und wir und im Ruhesystem befinden $k = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
[\pm\not{k}, \gamma_5\not{n}] &= \left[\pm\gamma^0 m, \gamma_5\left(\gamma^1 n^1+\gamma^2 n^2+\gamma^3 n^3\right)\right] \\
&= \left[\pm m\gamma^0, \gamma^5\right]\left(\gamma^1 n^1+\gamma^2 n^2+\gamma^3 n^3\right) \\
&\quad + \left[\pm m\gamma^0, \left(\gamma^1 n^1+\gamma^2 n^2+\gamma^3 n^3\right)\right]\gamma^5
\end{aligned}$$

Durch explizites nachrechnen beobachten wir, dass zum einen

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0,\gamma^5\right] &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und zum anderen $(i = 1,2,3)$

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0,\gamma^i\right] &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0,\gamma^5\right]\gamma^i &= -2\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\gamma^i \\
&= -2\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2\Sigma_i
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^0, \gamma^i\right] \gamma^5 &= 2\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\Sigma_i
\end{aligned}$$

und der Kommutator verschwindet also, wie gefordert. Weiters:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_+ (k) \, P(n) + \Lambda_- (k) \, P(n) + \Lambda_+ (k) \, P(-n) + \Lambda_- (k) \, P(-n) \\
= \; & \Lambda_+ (k) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{n}) + \Lambda_+ (k) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \not{n}) \\
+ \; & \Lambda_- (k) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \not{n}) + \Lambda_- (k) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \not{n}) \\
= \; & \Lambda_+ (k) + \Lambda_- (k) = 1 \quad \text{s.o..}
\end{aligned}$$

Bleibt noch einzusehen, dass

$$\operatorname{Sp} \Lambda_\pm P(\pm n) = \operatorname{Sp} \Lambda_\pm \left(1 \pm \gamma^5 \not{n}\right) = 1.$$

Eine Summe unter der Spur kann man auseinanderziehen. Im zweiten Summanden tauchen nur Terme folgender Art auf:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 \gamma^5 \gamma^i &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die PAULI-Matrizen haben aber alle keine Spur. Somit bleibt:

$$\operatorname{Sp} \Lambda_\pm P(\pm n) = \operatorname{Sp} \Lambda_\pm \frac{1}{2} = 1 \quad \text{s.o..}$$

e) Wählt man speziell $n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv n_{(3)}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(n_3) &= \frac{1}{2} \left(1 + \gamma^5 \gamma_3\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \gamma^5 \gamma^3\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma^3 & 0 \\ 0 & 1-\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&\doteq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

In Bezug auf die Spinoren im Ruhesystem

$$
u^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

erhalten wir folgende Projektionen:

$$
\begin{aligned}
P\left(n_{(3)}\right) u^1(x) &= u^1(x) \\
P\left(n_{(3)}\right) u^2(x) &= 0 \\
P\left(n_{(3)}\right) v^1(x) &= 0 \\
P\left(n_{(3)}\right) v^2(x) &= v^2(x)
\end{aligned}
$$

Physikalisch werden durch $P\left(n_{(3)}\right)$ positive Energielösungen auf „Spin auf" und negative Energielösungen auf „Spin ab" projiziert