Heiko Dumlich, Max Hoffmann 29. Mai 2007

Quantenmechanik 2 Übung 5

Aufgabe 7

a) Gegeben sind

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= e^{-ik\cdot x}u(k)\\ \psi_-(x) &= e^{ik\cdot x}v(k)\end{aligned}$$

Die Dirac-Gleichung lautet:

$$\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi = 0$$

Wir setzen $\psi_+(x)$ ein:

$$\begin{aligned}0 &= \left(i\partial\!\!\!/ - m\right)e^{-ik\cdot x}u(k)\\ &= i\partial\!\!\!/ e^{-ikx}u(k) - me^{-ik\cdot x}u(k)\end{aligned}$$

Den linken Term müssen wir auswerten

$$\begin{aligned}i\partial\!\!\!/ e^{-ik\cdot x}u(k) &= i\gamma^\mu\partial_\mu e^{-ik\cdot x}u(k)\\ &= i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}e^{-ik^\nu x_\nu}u(k)\\ &= (-i)\,i\gamma^\mu e^{-ik^\nu x_\nu}\frac{\partial k^\nu x_\nu}{\partial x^\mu}u(k)\\ &= \gamma^\mu e^{-ik^\nu x_\nu}k_\nu\underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}}_{=g^\mu{}_\nu}u(k)\\ &= \gamma^\mu e^{-ikx}k_\mu u(k)\\ &= k\!\!\!/ e^{-ik\cdot x}u(k)\end{aligned}$$

Wieder einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}(k\!\!\!/ - m)\,\psi_+ &= 0\\ \Rightarrow (k\!\!\!/ - m)\,u(k) &= 0\end{aligned}$$

Eine ganz analoge Rechnung mit umgekehrten Vorzeichen ergibt:

$$\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi_- = 0$$

führt auf

$$(-k\!\!\!/ - m)\,\psi_- = 0$$

$$(k\!\!\!/ + m)\,v(k) = 0$$

b) Im Ruhesystem des Teilchens wird k^μ zu

$$k^\mu = \left(k^0, \vec{k}\right) = \left(\frac{E}{c}, \frac{\vec{p}}{\hbar}\right) = \left(\frac{mc^2}{c}, \mathbf{0}\right) = (m, \mathbf{0})$$

und damit

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = mt$$

sowie

$$\not{k} = \gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 m.$$

Setzen wir dies in die in **a)** gewonnenen Eigenwertgleichungen ein folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{k} - m)\, u \\ &= \left(\gamma^0 m - m\right) u \\ &= \left(\gamma^0 - 1\right) mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\gamma^0 - 1\right) u = 0$$

Mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\gamma^0 - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

bzw. für $\left(\gamma^0 + 1\right) v = 0$

$$\gamma^0 + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich gewissermaßen auf triviale Weise die Lösungen

$$\psi_+^1(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_+^2(x) = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_-^1(x) = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_-^2(x) = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Eine endliche Lorentz-Transformation lautet

$$S(\Lambda) = \exp\left(-i\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/4\right)$$

In diesem Fall lautet

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \zeta \Omega^{\mu}{}_{\nu}$$

Ein Boostgenerator für eine beliebige Richtung, stellen wir dar durch

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = (v_x K_x + v_y K_y + v_z K_z)^{\mu}{}_{\nu}$$

mit

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v\cos\alpha, v\cos\beta, v\cos\gamma) \quad \text{und} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ein typischer Boostgenerator lautet zum Beispiel:

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Fall einer Transformation aus dem Ruhesystem gilt

$$\mu = 0 \qquad \text{und} \qquad \nu = i = 1, 2, 3$$

und damit

$$S(\Lambda) = \exp\left(i\zeta\left(\sigma_{0i}\Omega^{0i} + \sigma_{i0}\Omega^{i0}\right)/4\right) = \exp\left(i\zeta\left(\sigma_{0i}\Omega^{0i}\right)/2\right) = \exp\left(i\zeta\left(\sigma^{0i}\Omega_{0i}\right)/2\right).$$

Wir benutzen die Definition von Übungszettel 4

$$\begin{aligned} \sigma^{0i} &= \frac{i}{2}\left[\gamma^0, \gamma^i\right] = \frac{i}{2}\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{2i}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = i\alpha^i \end{aligned}$$

Wieder eingesetzt ergibt sich

$$S(\Lambda) = \exp\left(ii\frac{\zeta}{2}\alpha^i\Omega_{0i}\right) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\alpha^i\frac{v_i}{v}\right) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right)$$

d) Gegeben ist eine endliche Lorentz Transformation aus dem Ruhesystem

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right) \tag{1}$$

mit

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

die Pauli Matrizen bezeichnet und

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)\,.$$

Zunächst überzeugen wir uns, dass

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

und mit

$$\left(\sigma^1\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\left(\sigma^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\left(\sigma^3\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

folgt

$$\alpha_i^2 = 1 \qquad \text{sowie} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \vec{1}$$

Außerdem anti-kommutieren alle Komponenten von $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{aligned}
\{\alpha_i, \alpha_j\} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_i\cdot\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\cdot\sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_j\cdot\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_j\cdot\sigma_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{\sigma_i, \sigma_j\} & 0 \\ 0 & \{\sigma_i, \sigma_j\} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\{\sigma_3, \sigma_2\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\sigma_3, \sigma_1\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{\sigma_2, \sigma_1\} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

Das bedeutet.

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0,$$

also alle gemischten Terme in Potenzen von $\boldsymbol{\alpha}$ heben sich heraus. Jetzt können wir (1) als Reihe aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
S(\Lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\zeta}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right)^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{\zeta}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{\zeta}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n+1}}_{=\cosh(\zeta/2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v} \underbrace{\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{\zeta}{2}\right)^{2n}}_{=\sinh(-\zeta/2)} \\
&= \cosh\frac{\zeta}{2} - \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\sinh\frac{\zeta}{2}
\end{aligned}
$$

e) Es ist aus **d)** zu schliessen, dass

$$
S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

mit $p_\pm = p_x \pm i p_y$, $-\tanh\frac{\zeta}{2} = \frac{p}{E+m}$ und $\cosh\frac{\zeta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$ gilt. Wir gehen aus von:

$$S(\Lambda) = I_{4\times4}\cosh\frac{\zeta}{2} - \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\sinh\frac{\zeta}{2}$$

und erhalten durch einsetzen, ausklammern und $\sqrt{\frac{E+m}{2m}} = \cosh\frac{\zeta}{2}$:

$$
S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\sinh\frac{\zeta}{2}}{\cosh\frac{\zeta}{2}}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right)
$$

mit $-\frac{\sinh\frac{\zeta}{2}}{\cosh\frac{\zeta}{2}} = -\tanh\frac{\zeta}{2} = \frac{p}{E+m}$ und $p = mv$ folgt also:

$$
S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{p}{E+m}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}}{p}\right)
$$

Wir können nun $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$ explizit ausschreiben:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_y + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_z$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir:

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x + ip_y}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nun brauchen wir nur noch $p_\pm = p_x \pm ip_y$ nutzen und erhalten:

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$