Heiko Dumlich, Max Hoffmann 21. Mai 2007

Quantenmechanik 2 Übung 4

Aufgabe 6

a) Die Dirac Gleichung lautet

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0 \tag{1}$$

mit $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Der Spinor $\psi(x)$transformiert unter LORENTZ-Transformation Λ wie

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi\left(\Lambda^{-1}x\right) \tag{2}$$

setzte

$$x \to x' = \Lambda x$$

folgt daraus

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x)$$

und Λ ist definiert durch

$$(\Lambda)^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Nun fordern wir relativistische Kovarianz indem wir setzen

$$\left(i\partial\!\!\!/' - m\right)\psi'(x') = 0$$

wobei $\partial\!\!\!/' = \gamma^\nu \partial'_\nu = \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \gamma^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \partial_\mu$. Wendet man $S^{-1}(\Lambda)\cdot$ an, erhält man

$$iS^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \partial_\mu S(\Lambda)\,\psi(x) - m\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Identifiziert man (1) und (3) folgt

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \partial_\mu S(\Lambda)\,\psi(x) = \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)\,.$$

Damit dies für alle $\psi(x)$ im Hilbertraum der Spinoren gilt, muss auch

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \partial_\mu S(\Lambda) = \gamma^\mu$$

gelten. $S(\Lambda)$ ist eine konstante Matrix. Nun Sandwichen wir beide Seiten mit $S(\Lambda) \to\leftarrow S^{-1}(\Lambda)$ und erhalten

$$\gamma^\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu = S(\Lambda)\,\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)$$

b) Die Matrizen γ^μ gehorchen Darstellung der CLIFFORD Algebra, welche dadurch defniert ist, dass

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbf{1},$$

wobei $\{\ ,\ \}$ den Antikommutator bezeichnet. Zunächst wollen wir zeigen, dass

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] \tag{4}$$

die Gleichung

$$\left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right] = 2i\left(g^\mu{}_\alpha \gamma_\beta - g^\mu{}_\beta \gamma_\alpha\right) \tag{5}$$

erfüllt. Wir beachten, dass $g^\mu{}_\alpha$ nur eine Zahl ist und $g^\mu{}_\alpha = \delta_{\mu\alpha}$, das heißt, die Position der Indices hat hier keine Bedeutung, solange es sich um einen gemischten Tensor handelt. Wir setzen einfach ein und rechnen aus:

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right] &\overset{(4)}{=} \left[\gamma^\mu, \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right] \\
&= \frac{i}{2}\left(\gamma_\alpha\left[\gamma^\mu, \gamma_\beta\right] + \left[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\right]\gamma_\beta - \left[\gamma^\mu, \gamma_\beta\right]\gamma_\alpha - \gamma_\beta\left[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\right]\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta\right) \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(-\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha + \gamma_\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha - \gamma_\beta\gamma^\mu\gamma_\alpha + \gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma^\mu\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\left\{\gamma^\mu, \gamma_\alpha\right\}\gamma_\beta + \gamma_\beta\left\{\gamma_\alpha, \gamma^\mu\right\} - \gamma_\alpha\left\{\gamma_\beta, \gamma^\mu\right\} - \left\{\gamma^\mu, \gamma_\beta\right\}\gamma_\alpha\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(2g^\mu{}_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta 2g_\alpha{}^\mu - \gamma_\alpha 2g_\beta{}^\mu - 2g^\mu{}_\beta\gamma_\alpha\right) \\
&= 2i\left(g^\mu{}_\alpha\gamma_\beta - g^\mu{}_\beta\gamma_\alpha\right)
\end{aligned}$$

Wir schließen damit, dass (4) eine sinnvolle Definition ist. Nun wollen wir zeigen, dass (4) auch aus (2) folgt. Dazu ist es wichtig folgende Eigenschaft anzuwenden.

$$S\left(\Lambda\right) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}.$$

$S\left(\Lambda\right)$ muss unitär sein und die Gruppeneigenschaft

$$S\left(\Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)}\right) = S\left(\Lambda^{(1)}\right)S\left(\Lambda^{(2)}\right)$$

erfüllen. Sei $\Lambda^{(1)}$ eine beliebige Transformation und $\Lambda^{(2)}$ eine infinitesimale, so gilt

$$S\left(\Lambda^{(1)}\right)S\left(\Lambda^{(2)}\right) = S\left(\Lambda^{(1)}\right)\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dS\left(\Lambda^{(2)}\right)}{d\omega^{\alpha\beta}} &= \lim_{\omega^{\alpha\beta}\to 0}\frac{S\left(\Lambda^{(1)}\right) - S\left(\Lambda^{(1)}\right)\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)}{\omega^{\alpha\beta}} \\
&= -\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Eine unitäre Lösung davon ist

$$S_{\text{endl.}}\left(\Lambda\right) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}.$$

Daraus folgt

$$S^{-1}_{\text{endl.}}\left(\Lambda\right) = e^{\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}}$$

und damit

$$S^{-1}\left(\Lambda\right) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}.$$

Mit der gleichen Überlegung, kann man schließen, dass aus

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$$

folgt, dass

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\nu}{}_{\mu},$$

da ω asymmetrisch ist. Nun setzen wir in (2) vom Aufgabenblatt ein:

$$\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma^{\mu}\left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda}\right) = \left(g^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}\right)\gamma^{\nu}.$$

Berechnen wir zuerst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma^{\mu}\left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda}\right) &= \gamma^{\mu} + \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}\sigma_{\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda} - \sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}\right) \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{16}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}\sigma_{\kappa\lambda}\omega^{\kappa\lambda}}_{\in O(\omega^2)\to 0} \\
(\kappa \to \alpha \quad \lambda \to \beta) &= \gamma^{\mu} + \frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\left[\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}\right]
\end{aligned}$$

und nun zur rechten Seite

$$\begin{aligned}
\left(g^{\mu}{}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu}\right)\gamma^{\nu} &= \gamma^{\mu} - \frac{1}{2}\left(\omega^{\mu}{}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^{\mu}\right)\gamma^{\nu} \\
&= \gamma^{\mu} - \frac{1}{2}\left(\omega^{\alpha\beta}g^{\alpha}{}_{\mu}g_{\beta\nu} - \omega^{\alpha\beta}g^{\beta}{}_{\mu}g_{\alpha\nu}\right)\gamma^{\nu}.
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir beide Teile wieder zusammen und erhalten

$$\gamma^{\mu} + \frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\left[\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}\right] = \gamma^{\mu} - \frac{1}{2}\left(\omega^{\alpha\beta}g^{\alpha}{}_{\mu}g_{\beta\nu} - \omega^{\alpha\beta}g^{\beta}{}_{\mu}g_{\alpha\nu}\right)\gamma^{\nu}$$

und nach Streichen und mit $-4i/\omega_{\alpha\beta}$ multiplizieren folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}\right] &= 2i\left(g^{\alpha}{}_{\mu}g_{\beta\nu} - g^{\beta}{}_{\mu}g_{\alpha\nu}\right)\gamma^{\nu} \\
&= 2i\left(g^{\alpha}{}_{\mu}\gamma_{\beta} - g^{\beta}{}_{\mu}\gamma_{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

c) Es gilt für den Pauli-Lubenski-Vektor, mit $P^\sigma = i\partial^\sigma$:

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}L^{\nu\rho}P^\sigma$$

Zu zeigen ist, dass aus (2)

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right)$$

folgt.

Entwickeln wir die durch $L_{\mu\nu}$ erzeugte Transformation bis zu ersten Ordnung, erhalten wir

$$\psi'(x) = \left(1 - \frac{i}{2}L_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + O\left(\omega^2\right)\right)\psi(x) \tag{6}$$

Wir nutzen das in **b)** gezeigte $S(\Lambda)$ und erhalten auf der anderen Seite mit $\left(\Lambda^{-1}\right)^\kappa{}_\lambda = g^\kappa{}_\lambda - \omega^\kappa{}_\lambda$

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= S(\Lambda)\,\psi\left(\Lambda^{-1}x\right) \\
&= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi\left(x^\kappa - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\right)
\end{aligned}$$

Die Funktion $\psi(x)$ kann auch bis zur ersten Ordnung entwickeln, da ω infinitesimal ist:

$$\begin{aligned}
\psi\left(x^\kappa - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\right) &= \psi(x) - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\partial_\kappa\psi(x) \\
&= \left(1 - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\partial_\kappa\right)\psi(x)
\end{aligned}$$

Dies wird wieder eingesetzt. Unten benutzen wir nochmal den Trick $\omega^\alpha{}_\beta = \left(\omega^\alpha{}_\beta - \omega_\beta{}^\alpha\right)/2$

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\left(1 - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\partial_\kappa\right)\psi(x) \\
&= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \omega^\kappa{}_\lambda x^\lambda\partial_\kappa + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\underbrace{\omega^{\mu\nu}\omega^\alpha{}_\beta}_{\in O(\omega^2)}x^\beta\partial_\alpha\right)\psi(x) \\
&= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\omega^\kappa{}_\lambda - \omega_\lambda{}^\kappa\right)x^\lambda\partial_\kappa\right)\psi(x) \\
&= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(g_\mu{}^\kappa g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_\nu{}^\kappa\right)\omega^{\mu\nu}x^\lambda\partial_\kappa\right)\psi(x)\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Jetzt vergleichen wir (6) und (7) und erhalten

$$-\frac{i}{2}L_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(g_\mu{}^\kappa g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_\nu{}^\kappa\right)\omega^{\mu\nu}x^\lambda\partial_\kappa$$

Nun können wir $\omega^{\mu\nu}$ streichen und erhalten, wenn wir die Summe über κ und λ ausführen und mit $2i$ multiplizieren

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} - i\left(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann:

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^{\nu\rho} P^\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\sigma^{\nu\rho} + i\left(x^\nu \partial^\rho - x^\nu \partial^\rho\right)\right) i\partial^\sigma$$

dies ist also äquivalent zu:

$$W_\mu = -\frac{1}{4i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma$$

d) Um Eigenwerte von $W^2 = W_\mu W^\mu$ zu bestimmen, suchen wir also Werte, die

$$\left(i\partial\!\!\!/ - m\right) W^2 = 0$$

erfüllen.