Heiko Dumlich, Max Hoffmann 6. Mai 2007

Quantenmechanik 2 Ü2

Aufgabe 3

a) Die Fourier Darstellung im k-Raum lauten:

$$\tilde{\varphi}(k) = \int e^{-ikn}\varphi_n dn$$

$$\tilde{\pi}(k) = \int e^{-ikn}\pi_n dn$$

Dazu gibt es paasend transformierte Kommutatoren

$$\begin{aligned}
[\varphi_n, \varphi_{n'}] &\rightarrow \left[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}\left(k'\right)\right] \\
[\pi_n, \pi_{n'}] &\rightarrow \left[\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}\left(k'\right)\right] \\
[\varphi_n, \pi_{n'}] &\rightarrow \left[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\pi}^\dagger\left(k'\right)\right]
\end{aligned}$$

Diese kann man mit Hilfe der alten Kommutatoren ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}\left(k'\right)\right] &= \left[\int e^{-ikn}\varphi_n dn, \int e^{-ik'n'}\varphi_{n'} dn'\right] \\
&= \int dn \int dn' \underbrace{[\varphi_n, \varphi_{n'}]}_{=0} e^{-ikn-ik'n'} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}\left(k'\right)\right] &= \left[\int e^{-kn}\pi_n dn, \int e^{-k'n'}\pi_{n'} dn'\right] \\
&= \int dn \int dn' \underbrace{[\pi_n, \pi_{n'}]}_{=0} e^{-ikn-ik'n'} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und mit $\tilde{\pi}^\dagger(k) = \tilde{\pi}(-k)$ folgt

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{\varphi}(k), \tilde{\pi}^\dagger\left(k'\right)\right] &= \left[\int e^{-ikn}\varphi_n dn, \int e^{ik'n'}\pi_{n'} dn'\right] \\
&= \int dn \int dn' \underbrace{[\varphi_n, \pi_{n'}]}_{=i\delta_{n,n'}} e^{-ikn+ik'n'} \\
&= i\int dn\, e^{-in(k-k')} \\
&= i2\pi\delta\left(k-k'\right)
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen werden in Teil **3 d)** diskutiert.

b) Der Hamiltonoperator im Impulsraum wird damit hübsch diagonal. Der Hamiltonoperator im Ortsraum lautet

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\pi_n^2 + (\varphi_n - \varphi_{n+1})^2 + m^2 \varphi_n^2 \right]$$

Der Impuls konvertiert kanonisch

$$\pi_n^2 = \pi_n \pi_n \rightarrow \pi_k \pi_{-k}.$$

Den mittleren Term müssen wir getrennt betrachten:

$$(\varphi_n - \varphi_{n+1})^2 = \varphi_n \varphi_n + \varphi_{n+1}\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}\varphi_n - \varphi_n \varphi_{n+1}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n \varphi_n &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{ikn} e^{-ik'n} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int dk \int dk'\ e^{-in(k-k')} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk\ \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1} \varphi_{n+1} &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{ik(n+1)} e^{-ik'(n+1)} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int dk \int dk'\ e^{-in(k-k')} e^{-i(k-k')} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk\ e^{-i(k-k)} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk\ \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n \varphi_{n+1} &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{ikn} e^{-ik'(n+1)} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{-in(k'-k)} e^{-ik'} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk\ e^{-ik} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1} \varphi_n &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{ik(n+1)} e^{-ik'n} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi}\ e^{-in(k'-k)} e^{ik} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk\ e^{ik} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{-k}
\end{aligned}$$

Alles zusammengesetzt ergibt

$$\begin{aligned}(\varphi_n - \varphi_{n+1})^2 &= \frac{1}{2\pi}\int dk\ \varphi_k\varphi_{-k}\left(2-\left(e^{-ik}+e^{ik}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int dk\ \varphi_k\varphi_{-k}2\left(1-\cos k\right).\end{aligned}$$

Und als letztes noch

$$m^2\varphi_n^2 \to m^2\int\frac{dk}{2\pi}\varphi_k\varphi_{-k}.$$

Daraus folgt ein Hamiltonian im Impulsraum, der in der Tat diagonal ist

$$H = \frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}\ \pi_k\pi_{-k} + \underbrace{\left[m^2+2\left(1-\cos k\right)\right]}_{=:\omega_k^2}\varphi_k\varphi_{-k}.$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\int\frac{dk}{2\pi}\ \pi_k\pi_{-k} + \omega_k^2\varphi_k\varphi_{-k}}$$

Für den Kontinuumslimes $k \to 0$ folgt aus

$$\omega_k^2 = m^2 + 2\left(1-\cos k\right)$$

mit $\cos k \approx 1 - k^2/2\ldots$

$$\boxed{\omega_k = \sqrt{m^2+k^2}}$$

c) Nun definieren wir uns wieder die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}\left[\omega_k\tilde{\varphi}\left(k\right)+i\tilde{\pi}\left(k\right)\right]$$

$${a_k}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}\left[\omega_k\tilde{\varphi}\left(k\right)-i\tilde{\pi}\left(k\right)\right].$$

Die Kommutatoren dieser neuen Operatoren lauten, wenn man jeweils alle 4 Kommutatoren bildet.

$$\begin{aligned}\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right] &= \frac{1}{4\pi}\left[\omega_k\tilde{\varphi}\left(k\right)+i\tilde{\pi}\left(k\right), \omega_{k'}\tilde{\varphi}\left(k'\right)-i\tilde{\pi}\left(k'\right)\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left\{\left[\omega_k\tilde{\varphi}\left(k\right), -i\tilde{\pi}\left(k'\right)\right]+\left[i\tilde{\pi}\left(k\right), \omega_{k'}\tilde{\varphi}\left(k'\right)\right]\right\}\\ &= \frac{-i2\omega_k}{4\pi\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\underbrace{\left[\tilde{\varphi}\left(k\right), \tilde{\pi}\left(k'\right)\right]}_{i2\pi\delta(k-k')}\\ &= \delta\left(k-k'\right).\end{aligned}$$

Nach der selben Vorgehensweise, sieht man, dass

$$\begin{aligned}\left[{a_k}^\dagger, {a_k}^\dagger\right] &= 0\\ \left[a_k, a_k\right] &= 0.\end{aligned}$$

Um die Fourierdarstellungen zu finden, drücken wir φ und π zunächst durch $a_k^\dagger$ und a_k aus.

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_k}}\left(a_k^\dagger + a_k\right)\\ \tilde{\pi}(k) &= i\sqrt{\pi\omega_k}\left(a_k^\dagger - a_k\right)\end{aligned}$$

Damit erhält man bloß durch einsetzen:

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \int \frac{dk}{2\pi}\tilde{\varphi}(k)\,e^{ikn}\\ &= \int \frac{dk}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_k}}\left(a_k^\dagger + a_k\right)e^{ikn}\\ &= \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}}\left(e^{-ikn}a_k^\dagger + e^{ikn}a_k\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_n &= \int \frac{dk}{2\pi}\tilde{\pi}(k)\,e^{ikn}\\ &= -i\int \frac{dk}{2\pi}\sqrt{\pi\omega_k}\left(a_k - a_k{}^\dagger\right)e^{ikn}\\ &= -i\int dk\sqrt{\frac{\omega_k}{4\pi}}\left(e^{ikn}a_k - e^{-ikn}a_k{}^\dagger\right)\end{aligned}$$

Damit können wir jetzt auch den Hamiltonian alleine durch $a_k^\dagger$ und a_k ausdrücken.

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}\int \frac{dk}{2\pi}\quad \pi_k\pi_{-k} + \omega_k^2\varphi_k\varphi_{-k}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dk}{2\pi}\quad \left[-\omega_k\pi\left(a_k^\dagger - a_k\right)^2 + \omega_k^2\frac{\pi}{\omega_k}\left(a_k^\dagger + a_k\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dk}{2}\;\omega_k\left[-a_k^{\dagger 2} - a_k^2 + a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger + a_k^{\dagger 2} + a_k^2 + a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger\right]\\ &= \frac{1}{2}\int dk\;\omega_k\left[a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger\right]\\ &= \frac{1}{2}\int dk\;\omega_k\left\{a_k^\dagger, a_k\right\}\end{aligned}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\int dk\;\omega_k\left\{a_k^\dagger, a_k\right\}}$$

d) Untersucht man mit diesem Hamiltonian den Grundzustand $|0\rangle$ ergibt sich aber ein Widerspruch:

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2}\int dk\;\omega_k\left\langle 0\left|\left\{a_k^\dagger, a_k\right\}\right|0\right\rangle\\ &= \frac{1}{2}\int dk\;\omega_k\left\langle 0\left|a_k^\dagger a_k + a_k a_k{}^\dagger\right|0\right\rangle\end{aligned}$$

Der linke Term trägt hier aber nichts bei, denn

$$a_k|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle 0|a_k^\dagger = 0$$

und in sofern könnte man auch schreiben

$$\begin{aligned}
\langle 0\,|H|\,0\rangle &= \frac{1}{2}\int dk\ \omega_k \left\langle 0\left|a_k^\dagger a_k + a_k {a_k}^\dagger\right|0\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int dk\ \omega_k \left\langle 0\left|a_k {a_k}^\dagger - a_k^\dagger a_k\right|0\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int dk\ \omega_k \left\langle 0\left|\left[a_k, {a_k}^\dagger\right]\right|0\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int dk\ \omega_k \left\langle 0\left|\delta\left(k-k\right)\right|0\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int dk\ \omega_k \left\langle 0\left|\delta\left(0\right)\right|0\right\rangle = \infty
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen müssten also so periodisch gewählt werden, damit das Integral nicht divergiert. Daher wählen wir periodische Randbedingungen und erhalten dadurch nur diskrete Energeigenwerte. Der Hamiltonian muss so definiert werden, alle Erzeuguns-operatoren vor allen Vernichtungoperatoren stehen. Diese Umordnung wird als *normal* ordering bezeichnet. Der divergierende Term wird als Energie des Vakuums interpretiert.

e) Gesucht ist die Fourierdarstellung von $\dot{\varphi}_n\left(t\right)$. Dazu betrachten wir die HEISENBERG Gleichung

$$i\frac{d}{dt}A = [A, H] + i\frac{\partial}{\partial t}A$$

Für den Fall, das φ nicht explizit von der Zeit abhängt, folgt:

$$\dot{\varphi} = i\left[H, \varphi\right].$$

Damit können wir nun auch $\dot{\varphi}_n$ausrechnen. Wir setzen jeweils die Fourierdarstellungen im k-Raum ein.

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_n &= i\left[\left(\int dk\ \omega_k a_k^\dagger a_k\right), \left(\int \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left(a_{k'}e^{ik'n} + a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n}\right)\right)\right] \\
&= i\int\int dk\ dk'\ \frac{\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left[a_k^\dagger a_k, a_{k'}e^{ik'n} + a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n}\right] \\
&= i\int\int dk\ dk'\ \frac{\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left(\left[a_k^\dagger, a_{k'}e^{ik'n}\right] a_k + a_k^\dagger\left[a_k, a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n}\right]\right) \\
&= i\int\int dk\ dk'\ \frac{\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left(a_k^\dagger a_{k'}e^{ik'n}a_k - a_{k'}e^{ik'n}a_k^\dagger a_k + a_k^\dagger a_k a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n} - a_k^\dagger a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n}a_k\right) \\
&= i\int\int dk\ dk'\ \frac{\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left(a_k^\dagger a_{k'}a_k e^{ik'n} - a_{k'}a_k^\dagger a_k e^{ik'n} + a_k^\dagger a_k a_{k'}{}^\dagger e^{-ik'n} - a_k^\dagger a_{k'}{}^\dagger a_k e^{-ik'n}\right) \\
&= i\int\int dk\ dk'\ \frac{\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}}\left(\underbrace{\left[a_k{}^\dagger, a_{k'}\right]}_{=-\delta(k-k')} a_k e^{ik'n} + a_k{}^\dagger\underbrace{\left[a_k, a_{k'}{}^\dagger\right]}_{=\delta(k-k')} e^{-ik'n}\right) \\
&= i\int dk\ \sqrt{\frac{\omega_k}{4\pi}}\left(-a_k e^{ikn} + a_k^\dagger e^{-ikn}\right) = \pi_n
\end{aligned}
$$