Heiko Dumlich, Max Hoffmann 30. April 2007

1 Übungsblatt Theoretische Physik V

1.1 (Kommutator-Rechnung für Bosonen)

Es sind die Kommutatoren $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0$ für Bosonen gegeben. Es sind Kommutatoren zu berechnen, wobei wir vorher schnell eine Identität zeigen:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} \underbrace{- \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C}}_{=0} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$$

Durch diese Identität wird das lösen der Kommutatoren stark vereinfacht, wir beginnen mit dem ersten:

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right]\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \delta_{ij}\hat{a}_j + 0 = \delta_{ij}\hat{a}_j$$

Mit $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i = \delta_{ij}$ folgt für $\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right] = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j - \hat{a}_j\hat{a}_i^\dagger$ durch Vertauschung der Dummy-Indizes und einsetzen aus der ersten Relation $\left[\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_i\right] = \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i - \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger = \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger - \delta_{ij} - \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger = -\delta_{ij} = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right]$. Dies verwenden wir, um den zweiten Kommutator zu berechnen:

$$\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right]\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right] = 0 - \hat{a}_j^\dagger\delta_{ji} = -\hat{a}_j^\dagger\delta_{ji}$$

Für den dritten Kommutator folgt:

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k^\dagger\right] = \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right]\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_j^\dagger\left[\hat{a}_i, \hat{a}_k^\dagger\right] = \delta_{ij}\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_j^\dagger\delta_{ik}$$

Der letzte Kommutator ergibt sich zu:

$$\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\hat{a}_k\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right]\hat{a}_k + \hat{a}_j\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_k\right] = -\left(\delta_{ij}\hat{a}_k + \hat{a}_j\delta_{ik}\right)$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zur Übersicht zusammen:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right] &= \delta_{ij}\hat{a}_j \\
\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right] &= -\hat{a}_j^\dagger\delta_{ji} \\
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k^\dagger\right] &= \delta_{ij}\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_j^\dagger\delta_{ik} \\
\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\hat{a}_k\right] &= -\delta_{ij}\hat{a}_k - \hat{a}_j\delta_{ik}.
\end{aligned}$$

1.2 (Konstruktion des Drehimpulses aus den Operatoren eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators)

a)

Wir rechnen einfach explizit nach:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1 &= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right) \\
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a_\alpha}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{a}_\beta \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right) \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_2 &= \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right) \\
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{a}_\beta \\
&= \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right) \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_3 &= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2\right) \\
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{a}_\beta \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2\right) \checkmark
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta$$

$\square$

b)

Auch hier rechnen wir einfach explizit nach. Erst alles ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_1, \hat{J}_2\right] &= \left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \sigma_1 \hat{a}_\beta, \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \sigma_2 \hat{a}_\beta\right] \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right), \left(-i\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + i\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{4}\left(-\left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2,\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right]+\left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2,\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right]-\left[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1,\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right]+\left[\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1,\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right]\right)\\
&= \frac{i}{4}\left(-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right)\\
&- \frac{i}{4}\left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right)
\end{aligned}
$$

die Summanden links und rechts heben sich gerade weg. Die beiden mittleren addieren sich. Alle Operatoren mit verschiedenen Indices lassen sich beliebig vertauschen.

$$
=\frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right)=\frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\right)
$$

Hier können wir $0=-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2$ addieren.

$$
=\frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\right)
$$

In dieser Zeile erkennen wir sofort zwei Kommutatoren wieder, die wir ausklammern:

$$
=\frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\underbrace{\left[\hat{a}_2,\hat{a}_2^\dagger\right]}_{=1}-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\underbrace{\left[\hat{a}_1,\hat{a}_1^\dagger\right]}_{=1}\right)
$$

In dem verbleibendem Term drängt sich $\hat{J}_3$ geradezu auf:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)=\frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta}\hat{a}_\alpha^\dagger\sigma_3\hat{a}_\beta\\
&= i\hat{J}_3\surd
\end{aligned}
$$

Eine ganz analoge Rechnung mit nahezu identischen Schritten liefert das gleiche Resultat für die anderen Komponenten. Hier muss man lediglich einsehen, dass Kommutatoren auch dann ausgeklammert werden können, wenn sie *zwischen* zwei Operatoren stehen. Das geht natürlich, da es sich die ganze Zeit um Linearoperatoren handelt.

Z.Z.

$$
\hat{\mathbf{J}}^2=\hat{K}\left(\hat{K}+1\right)
$$

Wir beginnen auf der rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
\hat{K}\left(\hat{K}+1\right) &= \hat{K}^2+\hat{K}\\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)^2+\left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)^2+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right).
\end{aligned}
$$

Von der linken Seite ausgehend rechnet man.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2 &= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)^2 + \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)^2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)
\end{aligned}$$

Jeweils die ersten beiden Summanden der x und y Komponente heben sich weg. Die hinteren beiden addieren sich.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger \underbrace{\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger}_{=1+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2} \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \underbrace{\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger}_{=1+\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1} \hat{a}_2\right) - \frac{1}{4}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)^2 + \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) + \frac{1}{4}\left(\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)^2 + \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)^2 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\right)
\end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt, dass beide in der Tat identisch sind. Und damit folgt natürlich:

$$\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{K}\right] = \left[\hat{K}\left(\hat{K}+1\right), \hat{K}\right] = 0.$$

□

c)

Es ist zu zeigen, dass j alle nichtnegativen *ganzen* oder *halbzahligen* Werte anehmen kann. Hierzu betrachten wir $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{K}\left(\hat{K}+1\right)$, wobei der Eigenwert zu $\hat{\mathbf{J}}^2$ mit $j\,(j+1)$ gegeben ist, also $\hat{K}$ der Operator mit dem Eigenwert j ist. Dieser Operator ist gegeben mit $\hat{K} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)$. Mit dem Zahloperator $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ und dessen Eigenwerten $\hat{N}_i|n_1\ldots n_i\ldots n_n\rangle = n_i|n_1\ldots n_i\ldots n_n\rangle$ folgt für $\hat{K} = \frac{1}{2}\left(\hat{N}_1 + \hat{N}_2\right)$. Die Eigenwerte j ergeben sich also mit:

$$\hat{K}|n_1n_2\rangle = \frac{1}{2}\left(n_1+n_2\right)|n_1n_2\rangle.$$

Somit ist also $j = \frac{1}{2}\left(n_1+n_2\right)$, mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, damit kann j wie gefordert alle nichtnegativen *ganzen* oder *halbzahligen* Werte annehmen.

Es ist weiter zu zeigen, dass die Vektoren $|jm\rangle = \left[(j+m)!\,(j-m)!\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{j+m}\left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{j-m}|0\rangle$ die Basis einer $\left\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3\right\}$-Standarddarstellung bilden. Es gilt $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, hieraus folgt:

$$\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}}|n\rangle = |n+1\rangle$$

speziell für $n = 0$ folgt $\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{1}}|0\rangle = |1\rangle$, wenden wir den Erzeugungsoperator nun n-mal an, so erhalten wir $\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}\ldots\sqrt{n}}|0\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = |n\rangle$. Für unseren zweidimensionalen Fall erhalten wir also:

$$\frac{\left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1}\left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!}}|00\rangle = |n_1n_2\rangle.$$

Wählen wir "ergebnisorientiert" $n_1 = j+m$ und $n_2 = j-m$ erhalten wir:

$$\frac{\left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{j+m}\left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}|00\rangle = |j+m, j-m\rangle = |j,m\rangle.$$

Wir prüfen schnell die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_3$ für n_1 und n_2 und erhalten:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_3|n_1n_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(\hat{N}_1 - \hat{N}_2\right)|n_1n_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(j+m-(j-m)\right)|n_1n_2\rangle \\
&= m|n_1n_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2|n_1n_2\rangle &= \hat{K}\left(\hat{K}+1\right)|n_1n_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(n_1+n_2\right)\left(\frac{1}{2}\left(n_1+n_2\right)+1\right)|n_1n_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(2j\right)\left(\frac{1}{2}\left(j+m+j-m\right)+1\right)|n_1n_2\rangle \\
&= j\left(j+1\right)|n_1n_2\rangle
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte stimmen mit der Erwartung überein, somit sind die gegebenen Vektoren eine Basis zu der $\left\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3\right\}$-Standarddarstellung.