Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 9

Aufgabe 13: Matematische Voraussetzung zum Pfadintegral: das Gauß-Integral

(a) Zeigen Sie, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$
wobei Re $a > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie das Quadrat des obigen Integrals und benutzen Sie Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right),$$
wobei Re $a > 0$ und $b \in \mathbb{C}$.

(c) Beweisen Sie durch Konturintegration, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(\mathrm{i}\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} \begin{cases} \sqrt{\mathrm{i}} & a > 0, \\ 1/\sqrt{\mathrm{i}} & a < 0 \end{cases}$$

(d) Zeigen Sie, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{N} dx_i\right) \exp\left(-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j + b_i x_i\right) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left[\frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j\right],$$
wobei $A = (A_{ij})$ eine $N \times N$ reell symmetrische Matrix ist und die Eigenwerte λ_i der Matrix A die Ungleichung Re $\lambda_i > 0$ erfüllen.

(e) Zeigen Sie, dass
$$\int \prod_{i=1}^{N} (dz_i dz_i^*) \exp\left(-z_i^* C_{ij} z_j + \zeta_i^* z_i + z_i^* \zeta_i\right) = \frac{\pi^N}{\det C} \exp\left[\zeta_i^* (C^{-1})_{ij} \zeta_j\right],$$
wobei $z_i, \zeta_i \in \mathbb{C}$ und C eine hermitische Matrix ist.

10 Punkte

Aufgabe 14: Greensche Funktion eines harmonischen Oszillators: Einführung in das Pfadintegral

Betrachten Sie das Funktional
$$Z[j] = \int \mathcal{D}x \; e^{i\mathcal{A}[x,j]},$$
wobei $\mathcal{A}[x,j] = \mathcal{A}[x] - \int_{-\infty}^{\infty} dt j(t) x(t)$ ist und
$$\mathcal{A}[x] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$
die klassische Wirkung für einen harmonischen Oszillator der Masse $m = 1$ ist. Das Integral $Z[j]$ bezeichnet das sogenannte Pfadintegral. Im Rahmen des gegenwärtigen Beispiels, wird es als eine Verallgemeinerung des Gauß-Integrals der Aufgabe 13-(d) definiert, in dem Sinn dass man x_i durch $x(t)$ ersetzt. Also spielt die Zeit t die Rolle eines kontinuierlichen Indexes.

(a) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t')j(t')$$

ein stationärer Punkt von $\mathcal{A}[x, j]$ ist, wobei $(\partial_t^2 + \omega^2)G(t-t') = -\delta(t-t')$ und $d^2x_0/dt^2 = -\omega^2 x_0$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$Z[j] = Z[0] \exp\left[-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' j(t)G(t-t')j(t')\right].$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} G(t_1 - t_2) &= \frac{i}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\delta j(t_2)}\bigg|_{j=0} \\ &= -\frac{i}{Z[0]} \int \mathcal{D}x \; x(t_1)x(t_2) \; e^{i\mathcal{A}[x]}. \end{aligned}$$

Hinweis: Für Funktionalableitungen gilt $\delta x(t)/\delta x(t') = \delta(t-t')$. Das ist eine Verallgemeinerung der Regel $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$.

(d) Bestimmen Sie $G(t)$.

(e) Berechnen Sie $\langle 0|T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)]|0\rangle$, wobei $T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)] \equiv \theta(t_1-t_2)\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) + \theta(t_2-t_1)\hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1)$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus der Teilaufgabe (d).

10 Punkte

Ausgabetermin: 18.06.2007, Abgabetermin: 25.06.2007, 12 Uhr