Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 7

Aufgabe 9: SO(3) und SU(2)
Die Gruppe von Rotationen in $\mathbb{R}^3$, die sogenannte Gruppe SO(3), enthält alle 3×3 Matrizen $R(\boldsymbol{\theta})$, die die Eigenschaften $R(\boldsymbol{\theta})R^T(\boldsymbol{\theta}) = I$ und $\det R(\boldsymbol{\theta}) = 1$ erfüllen. In dieser Aufgabe studieren wir ausgewählte Aspekte von SO(3).

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen J_1, J_2 und J_3 mit Matrixelementen $(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$ die Vertauschungsrelation $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ erfüllen (vergleiche Aufg. 2).

(b) Zeigen Sie:

1. $\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$.
2. $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, wobei $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei Vektoren sind.

(c) Betrachten Sie die Menge $\mathcal{M}$ der 2×2 hermiteschen Matrizen M, so dass $\mathrm{Sp}(M) = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ isomorph zur $\mathbb{R}^3$ ist.

(d) Sei $R_U : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ eine Abbildung $M \mapsto M' = R_U(M) = UMU^{-1}$, wobei $U \in SU(2)$, d.h. $U^{-1} = U^\dagger$ und $\det U = I$. Zeigen Sie, dass M' hermitesche ist und $\mathrm{Sp}(M') = 0$. Schliessen Sie daraus, dass $M' \in \mathcal{M}$ und $R_U \in \mathrm{SO}(3)$, d.h. die Abbildung R_U ein Homomorphismus von SU(2) zur SO(3) ist. Zeigen Sie, dass es keinen Isomorphismus gibt.

8 Punkte

Aufgabe 10: SU(3)
Betrachten Sie die sogenannten Gell-Mann-Matrizen:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die obigen Matrizen sind hermitesche mit $\mathrm{Sp}\,\lambda_i = 0$. Sie spielen eine wesentliche Rolle in der Quantenchromodynamik (QCD).

(a) Die Gell-Mann-Matrizen erfüllen die Algebra: $[\lambda_i, \lambda_j] = 2\mathrm{i} f_{ijk}\lambda_k$ und $\{\lambda_i, \lambda_j\} = (4/3)\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$, wobei die f_{ijk} antisymmetrisch sind während die d_{ijk} symmetrisch sind. Bestimmen Sie die Konstanten f_{ijk} und d_{ijk}.

(b) Die sogenannten Isospin und Hyperladung sind definiert bzw. durch $I_\alpha = \lambda_\alpha/2$ ($\alpha = 1,2,3$) und $Y = \lambda_8/\sqrt{3}$. Die Quarkladung definiert man als $Q = I_3 + Y/2$. Die Matrizen λ_3 und λ_8 haben die gemeinsame Eigenvektoren $|R\rangle = (1,0,0)$, $|G\rangle = (0,1,0)$ und $|B\rangle = (0,0,1)$, die den Farbeladungen R, G und B entsprechen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)|G\rangle = |R\rangle, \qquad \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2)|R\rangle = |G\rangle,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)|R\rangle = |B\rangle, \qquad \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5)|B\rangle = |R\rangle,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)|G\rangle = |B\rangle, \qquad \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7)|B\rangle = |G\rangle.$$

4 Punkte

Ausgabetermin: 04.06.2007, Abgabetermin: 11.06.2007, 12 Uhr