Aufgabe 8: Projektionsoperatoren in der Diracschen Theorie
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung der Aufgaben 6 und 7.

(a) Betrachten Sie die Spinoren $u^r(k)$ und $v^r(k)$, die in der Aufgabe 7 gerechnet wurden. Zeigen Sie, dass

$$\bar{u}^r(k)u^{r'}(k) = \delta_{rr'}, \qquad \bar{u}^r(k)v^{r'}(k) = 0,$$
$$\bar{v}^r(k)u^{r'}(k) = \delta_{rr'}, \qquad \bar{v}^r(k)u^{r'}(k) = 0.$$

(b) Berechnen Sie $(\not{k} + m)\gamma^0(\not{k} + m)$ für $k^2 = m^2$ und zeigen Sie, dass

$$\Lambda_+(k) = \sum_{r=1,2} u^r(k) \otimes \bar{u}^r(k) = \frac{\not{k} + m}{2m}, \qquad \Lambda_-(k) = -\sum_{r=1,2} v^r(k) \otimes \bar{v}^r(k) = \frac{-\not{k} + m}{2m}$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Lambda_\pm^2(k) = \Lambda_\pm(k), \qquad \mathrm{Sp}\ \Lambda_\pm = 2, \qquad \Lambda_+(k) + \Lambda_-(k) = I.$$

(d) Zeigen Sie, dass für einen auf -1 normierten raumartigen Vektor n_μ die folgende Formel gilt:

$$W_\mu n^\mu = -\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n}\not{k}$$

wo W_μ der Pauli-Lubenski-Vektor (siehe Aufgabe 5) ist und $\gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Schliessen Sie daraus, dass für ein Ruhesystem $W^0 = 0$ und

$$\frac{\mathbf{W}}{m} = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma},$$

wobei $\boldsymbol{\Sigma}$ in der Diracschen Darstellung lautet:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}.$$

(e) Nehmen Sie $n = (0, 0, 0, 1) \equiv n_{(3)}$ an und bestimmen Sie die Eigenwerte von $W_\mu n^\mu$ bezüglich eines ruhenden Teilchens. Zeigen Sie zunächst, dass der Projektionsoperator auf die Spinoren $u^1(m, \mathbf{0})$ und $v^2(m, \mathbf{0})$ in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$P(n_{(3)}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I + \sigma_3 & 0 \\ 0 & I - \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis physikalisch in Termen von “Spin auf” und “Spin ab”.

(f) Im Allgemeinen ist der Projektionsoperator auf die Spinoren $u^1(k)$ und $v^2(k)$ durch

$$P(n) = \frac{1}{2}(I + \gamma_5\not{n})$$

gegeben. Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

$$[\Lambda_\pm, P(n)] = 0, \qquad \mathrm{Sp}\ \Lambda_\pm P(\pm n) = 1,$$
$$\Lambda_+(k)P(n) + \Lambda_-(k)P(n) + \Lambda_+(k)P(-n) + \Lambda_-(k)P(-n) = I.$$

12 Punkte

Ausgabetermin: 29.05.2007, Abgabetermin: 04.06.2007, 12 Uhr